Linea di Matematica e Rivista Interdisciplinare
Matematica

**Varie considerazioni nei rapporti fra Arte figurativa e Matematica**
B. D'Amore e M. I. Fandiño Pinilla

**Dibattito o Debate? Alcune riflessioni a partire da un'esperienza in classe**
D. Paola

**Social Choices in un esperimento di classe**
G. Bimonte

**L'interpretazione delle informazioni visuali in Matematica**
P. L. Ferrari

**NUMERO 2**
**Gennaio 2023**

**Quando l'insegnamento della Matematica si scopre violento**
A. Demattè

**ISSN 2974-5772 (online)**

**Linea Matematica**, rivista interdisciplinare di Matematica e...



Periodico semestrale, ISSN 2974–5772 (online).

# Indice

## Editoriale

### A cura del comitato editoriale

Il secondo numero della rivista semestrale "Linea Matematica" propone una serie di contribuiti di studiosi impegnati prevalentemente nei settori della didattica della Matematica.

I lavori si caratterizzano, sulla base di una precisa scelta editoriale, per una forte valenza interdisciplinare. Infatti è nostra ferma convinzione che oggi sia quanto mai utile e necessario rendere disponibili, per docenti ed alunni, ricerche e materiali didattici - scientificamente fondati e di agile fruibilità - per approfondire tematiche e metodologie che facilitino il dialogo tra i diversi ambiti culturali.

D'altra parte, si tratta di una impostazione che accompagna "Linea Matematica" fin dalla sua nascita dal momento che quasi tutti i componenti del Comitato Editoriale sono impegnati, a vario titolo, nel progetto "Liceo Matematico", una sperimentazione che tende a investigare i profondi legami interdisciplinari che sussistono nei diversi contesti teorici e a stimolare docenti e discenti in percorsi formativi sempre più lontani da un mero nozionismo e in grado di favorire la crescita personale.

In altri termini, sia il progetto Liceo Matematico sia la rivista Linea Matematica intendono concorrere – sia nell'ambito della ricerca sia in quello della didattica - ad una radicale inversione di rotta rispetto a quella tendenza (pericolosa e improduttiva) che conduce troppo spesso alla parcellizzazione e frantumazione dei saperi disciplinari. Questi ultimi infatti corrono il rischio, laddove non posti in relazione tra di loro, di divenire - per usare un'icastica espressione di Edgar Morin – dei "segmenti morti", incapaci di formare un pensiero complesso e di rispondere alle domande di conoscenza radicali che provengono da ambiti interconnessi e da intendere come parti del più ampio sistema globale.

A seguire una sintetica presentazione dei lavori che rientrano in questo numero.

In coerenza con l'approccio interdisciplinare del progetto Liceo Matematico risulta essere anche il lavoro di Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla "Varie considerazioni nei rapporti fra Arte figurativa e Matematica". Gli autori infatti svolgono con ricchezza di argomentazioni un affascinante percorso che rivela le nascoste armonie e consonanze tra forme e simboli utilizzati dalla scienza e gli stilemi artistici di grandi opere delle arti figurative e della letteratura.

Pier Luigi Ferrari nel lavoro "L'interpretazione delle informazioni visuali in matematica" affronta la questione del ruolo delle immagini nella didattica della matematica, soprattutto per quanto riguarda la fase di passaggio da scuola secondaria superiore a università. L'autore pone in evidenza - attraverso il riferimento a molteplici situazioni didattiche - come nell'apprendimento della matematica l'uso delle immagini sollevi problematiche che devono essere tenute in debito conto dal docente. Se le immagini della vita quotidiana ci inducono a dar per scontato che la prima e immediata interpretazione sia quella più giusta, quelle della matematica impongono un processo più lungo e critico.

Il lavoro di Domingo Paola "Dibattito o Debate? Alcune riflessioni a partire da un'esperienza in classe" svolge una puntuale analisi critica della metodologia didattica del Debate che, secondo i suoi fautori, permette di acquisire competenze trasversali («life skill»), favorisce il cooperative learning e la peer education non solo tra studenti, ma anche tra docenti e tra docenti e studenti. Secondo l'autore i limiti di tale approccio didattico consistono nella sua tendenza ad enfatizzare la competitività tra le componenti in gioco conducendo, in una sorta di eterogenesi dei fini, ad esiti opposti a quelli che si intendono perseguire. Di contro l'autore propone quello che, almeno a suo dire, risulta essere un percorso didattico più produttivo, ossia di quello definito "dibattito formativo" in grado di favorire tra i partecipanti l'acquisizione di conoscenze più approfondite e di competenze più solide.

Adriano Demattè propone nel suo articolo "Quando l'insegnamento della matematica si scopre violento" un interessante approccio al tema della didattica della matematica condotto mediante l'utilizzo delle categorie interpretative di Levinas. Secondo il filosofo francese l'incontro con l'altro è all'origine dell'etica. Ed è una dimensione che permea di sé anche il rapporto tra insegnante e alunni nell'apprendimento/insegnamento della matematica. Se la scuola non stimola la comprensione genuina di un testo matematico ma di contro ne favorisce – anche per responsabilità del docente - un mero uso strumentale ai fini del successo scolastico, ciò equivale ad un implicito "atto violento" che ha conseguenze negative nel processo educativo. Viceversa è solo la condivisione dei criteri per la comprensione dei concetti matematici - nella relazione dialogica tra studente e insegnante - a porre le basi di situazioni educative valide e produttive.

Giovanna Bimonte nel lavoro "Social Choices in un esperimento di classe" descrive e analizza l'esperienza didattica condotta nelle classi quinte del Modulo di Matematica ed Economia del Progetto Liceo Matematico. Si tratta di un modello sviluppato dal gruppo di ricerca di didattica della matematica del Dipartimento di Matematica in collaborazione con il Dipartimento di Scienze Economiche e Statistiche dell'Università di Salerno. L'idea guida del laboratorio è stata quella di coinvolgere gli studenti nell'apprendimento attivo, sfruttando la loro naturale curiosità per le questioni economiche e sociali, e farli riflettere sulle domande prima di cercare di dare loro delle risposte fondate sulla teoria. L'esperienza ha condotto gli studenti alla comprensione della complessità dei processi decisionali in ambito sociale e alla evidenziazione dei limiti di applicabilità dei modelli scientifici in tali contesti.

Ricordiamo che la Rivista è completamente gratuita ed è disponibile all'indirizzo:
`https://www.lineamatematica.it`

# Per l’aula

## Collegamenti

Collegamenti tra la Matematica e le altre discipline.

# Varie considerazioni nei rapporti fra Arte figurativa e Matematica

**Bruno D'Amore[1 2] e Martha Isabel Fandiño Pinilla[2]**
[1]Doctorado Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia
[2]NRD, Dipartimento di matematica, Università di Bologna, Italia

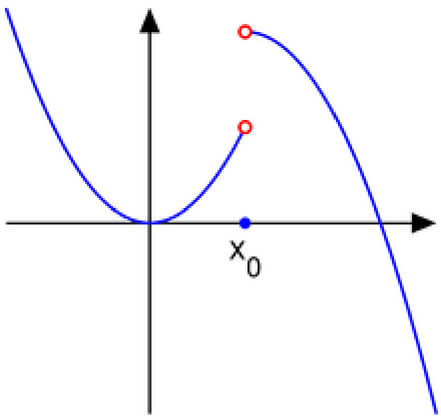
bruno.damore@unibo.it
marisafp@hotmail.it

**Sommario.** In questo testo proponiamo varie considerazioni che a nostro avviso regalano vari legami, alcuni dei quali inattesi, fra matematica e arte figurativa, allo scopo di fornire materiale di riflessione culturale generale e suggerire ipotesi di lavoro nelle ore di matematica a scuola.

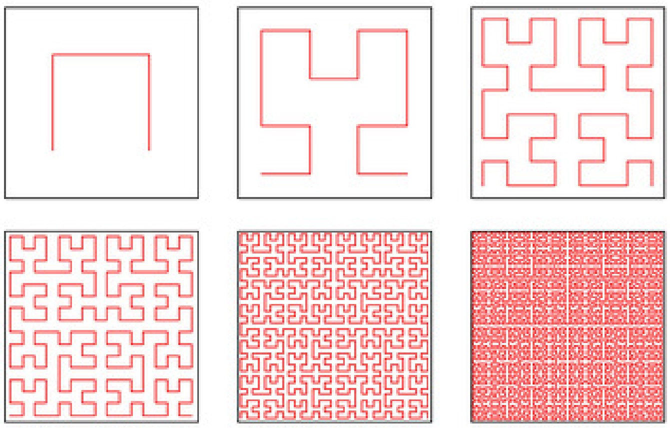
**Abstract.** In this paper, we propose various considerations that in our view provide various links, some of them unexpected, between mathematics and figurative art, with the aim of providing material for general cultural reflection and suggesting working hypotheses in school mathematics lessons

## 1. Singolarità

Il termine "singolarità" in Matematica indica un qualcosa (oggetto o situazione) che, rispetto ad altri analoghi nel contesto, ha un ruolo particolare, che si discosta dalla "normalità" o "regolarità" imperanti o attese per un qualche motivo. In molti campi della Matematica esistono situazioni o oggetti per i quali si può parlare di singolarità e le interpretazioni che se ne danno nei diversi contesti specifici possono essere anche assai diverse tra loro.
In Analisi, per esempio, si parla di singolarità quando si presentano punti di discontinuità; per chiarire: supponiamo di avere una funzione $f$ a valori reali; supponiamo che, in un certo punto P (di ascissa $x_0$) del dominio di $f$, $f$ stessa non sia continua. In tal caso P è detto "punto di discontinuità di $f$".
Come sinonimo, molti autori dicono che P è una singolarità (si possono distinguere vasi casi di singolarità).



In altri domini, per esempio in Analisi complessa, si parla ancora di singolarità, con significati assai più specifici.
In Algebra lineare si riserva il nome di matrice singolare a una matrice quadrata il cui determinante è nullo o il cui rango non è il massimo; il che comporta che le matrici singolari non sono invertibili, cioè non esiste per esse una matrice tale che il loro prodotto sia la matrice identità.
In Geometria algebrica, i punti singolari sono quei punti di una data varietà (per esempio una curva) che hanno comportamenti speciali, diversi dagli altri punti della stessa curva.
In maniera efficace, ma in versione più divulgativa, spesso con "singolare" si intende un oggetto matematico che (o una situazione matematica nella quale) si presenta qualcosa che pare sfuggire alla logica attesa.
Per esempio, al finale del XIX secolo il matematico italiano Giuseppe Peano (1858 – 1932) mostrò agli occhi increduli del mondo accademico una curva costruita per successive generalizzazioni che presenta una caratteristica che ha dell'impossibile. Nel suo caso si trattava di definire in modo opportuno e ineccepibile una curva (dunque un oggetto unidimensionale) che ha la proprietà di riempire un quadrato (dunque un oggetto bidimensionale).

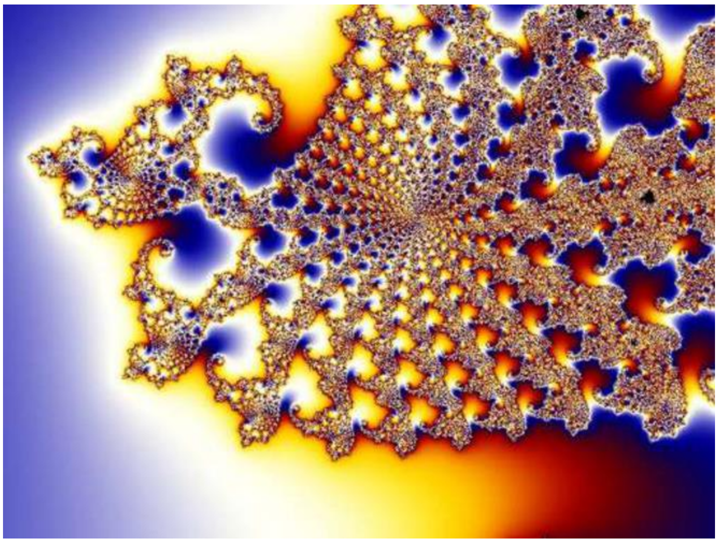


Una successione di fasi della costruzione della curva di Peano.

Ora, questa situazione è paradossale se considerata dal punto di vista strettamente geometrico: una curva (dimensione 1) non può riempire un quadrato (dimensione 2). Proprio la … singolarità della costruzione iterativa proposta da Peano, invece, lo permette.
L'oggetto matematico in questione e la situazione prodotta sono così inaspettatamente geniali (singolari) che artisti di vario interesse hanno voluto rendere omaggio a Peano.

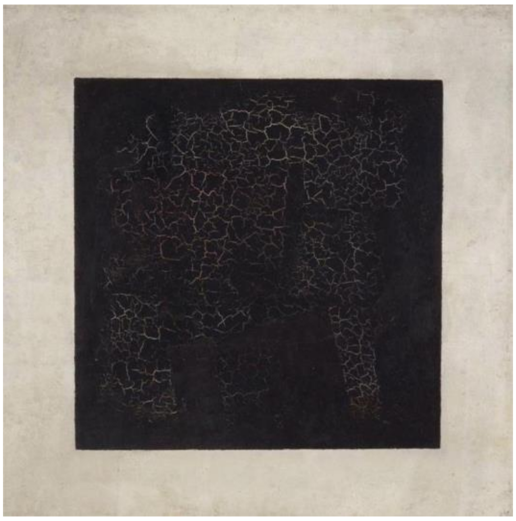
Dario Ghibaudo, *Curva di Peano*, 1998, Cuneo.

Molti considerano singolarità anche i frattali, cioè quegli oggetti che appartengono al campo della Geometria e che replicano sé stessi in scale diverse, essendo dotati di omotetia interna. C’è chi la chiama *autosimilarità*. Il termine iniziale è di Benoît Mandelbrot (1924 – 2010), metà degli anni ‘70 del secolo scorso. Sono oggetti geometrici singolari assai, molto amati anche nel mondo dell’Arte figurativa.



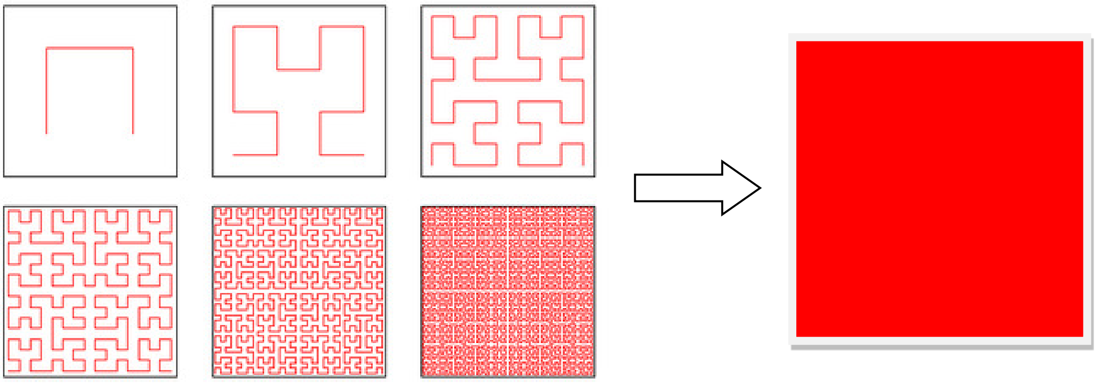
Esempio di frattale.

Il mondo delle singolarità, in ogni dominio dello scibile umano, costituisce un fascino discreto e sottile perché, rubando alla “normalità” un predominio esistenziale, costringe lo studioso, il coraggioso esploratore di mondi inconsueti, a rincorrere (e realizzare) sogni, fantasie, sottili e arcane armonie che si discostano dalla ripetizione ossessiva e normale …
Passando a tutt’altro campo, ricordiamo che il grande artista russo Kazimir Malevich (1879 – 1935) espose la sua opera più famosa (*Quadrato nero*) nella Galleria Tretyakov a Mosca, nel 1915, in occasione della *Last Futurist Exhibition*. Si trattava di un olio su lino, di 79.5×79.5 cm. Visto il grandissimo successo internazionale, ne fece successivamente (e con una certa facilità!) quattro varianti fra la fine degli anni ‘20 e i primi ‘30.
A nostro avviso, l’opera era tanto rivoluzionaria, quanto quella di Peano … E, in un certo senso, relativamente simile, almeno come aspetto finale …



Kazimir Malevich, *Quadrato nero*, prima versione: 1915.

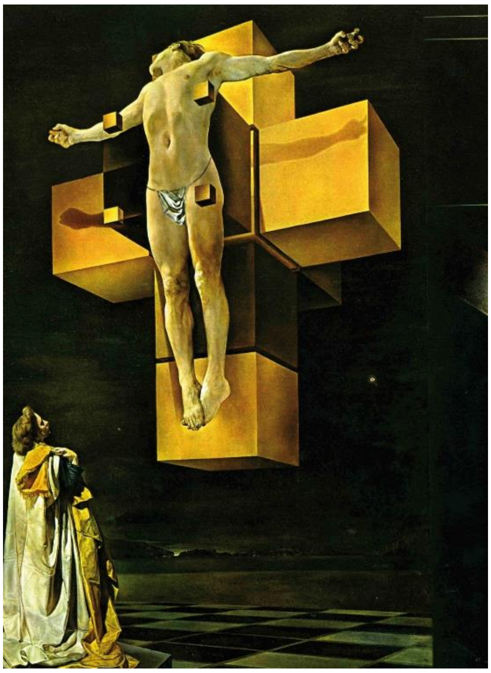
E, difatti, è impossibile resistere al fascino dell'analogia figurale …



Giuseppe Peano, Curva di Peano, iterazione. Realizzata nel 1890 circa.

**2. Più dimensioni**

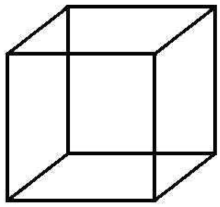
A proposito di dimensioni, in Geometria, è ben noto che riflessioni teoriche portano a considerare lo studio teorico di spazi a più di 3 dimensioni.
Ma non si creda che questo fatto sia esclusivo per la Matematica.



Salvador Dalì (1904 - 1989), *Crocefissione, corpo ipercubico*, 1954, olio su tela, 58,4 × 73,7 cm, Metropolitan Museum of Art. New York.

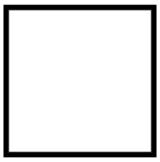
Nell'opera *Crocefissione, corpo ipercubico* del 1954 di Salvador Dalì, appare una croce di grande suggestione matematica, composta di cubi, assolutamente corretta sul piano epistemologico; ma chi la osserva, di solito, non si rende conto della profonda sapienza matematica nascosta in questo dipinto. Ci pare il caso di dare i semplicissimi dettagli matematici di questa creazione, anche per testimoniare la competenza matematica del geniale pittore catalano.

Cominciamo con l’osservare almeno mentalmente un cubo, che è un oggetto matematico tridimensionale (3D).



Rappresentazione bidimensionale in prospettiva di un cubo.

Le sue sei facce (bordi del cubo) sono quadrati, oggetti matematici a due dimensioni (2D).
Nulla ci impedisce di pensare di proiettare il cubo perpendicolarmente su uno dei piani che passano per una delle sue facce. Tale proiezione dà luogo a un quadrato.



Rappresentazione bidimensionale di un cubo proiettato perpendicolarmente sul piano di una delle sue facce.

I suoi quattro lati (bordi del quadrato) sono segmenti, oggetti matematici a una dimensione (1D).
Nulla ci impedisce di pensare di proiettare il quadrato perpendicolarmente su una delle rette che passano per uno dei suoi lati. Tale proiezione dà luogo a un segmento.

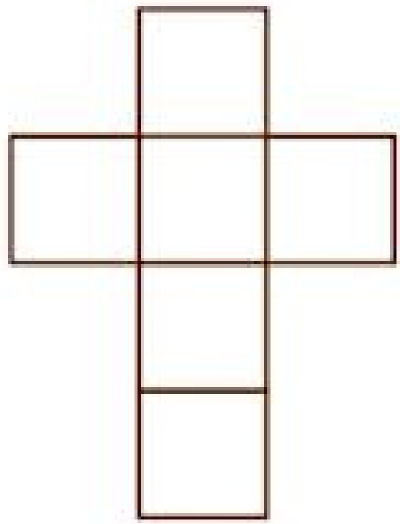


Rappresentazione unidimensionale di un quadrato proiettato perpendicolarmente sulla retta di uno dei suoi lati.

I suoi due vertici (bordi del segmento) sono punti, oggetti matematici a zero dimensione (0D).
Nulla ci impedisce di pensare di proiettare il segmento su uno dei suoi vertici.
Tale proiezione dà luogo a un punto che indicheremo qui con una macchietta di inchiostro.

Punto.

Dunque, il punto si può pensare come una rappresentazione del cubo in uno spazio 0D, il segmento come una rappresentazione del cubo in uno spazio 1D, il quadrato in uno spazio 2D.
Ma chi ci impedisce di generalizzare il ragionamento per spazi di dimensione 4? Così come il quadrato è la rappresentazione di un cubo in 2D, il cubo si può pensare come la proiezione in 3D di un ipercubo in uno spazio 4D: impossibile anche solo tentare di rappresentarlo.
Tuttavia …
Se vogliamo passare dal quadrato 2D al cubo 3D, possiamo operare come segue:
disegniamo il quadrato, disegniamo in corrispondenza di ogni suo bordo (che è un lato) un quadrato uguale (e siamo a 5 quadrati tutti uguali); e poi disegniamo su un bordo esterno (che è un lato di uno dei quadrati aggiunti) un altro quadrato uguale; e siamo a sei quadrati uguali disposti come segue.



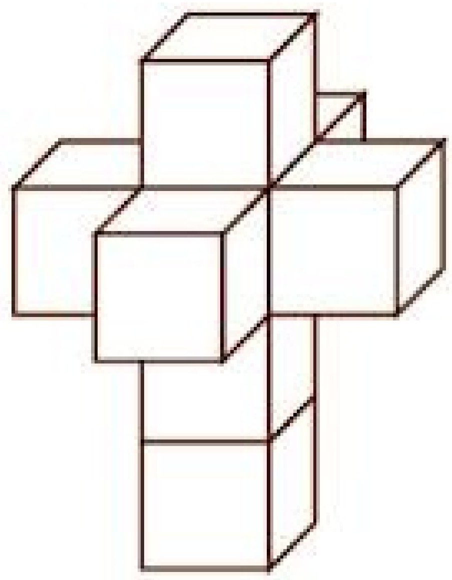
Cinque quadrati disposti attorno a uno dato, tutti uguali tra loro.

Ora la figura si può richiudere, com'è facilmente comprensibile a chiunque, per ottenere il cubo di partenza.
Lo stesso procedimento si può ottenere a partire dal segmento (1D) per ottenere un quadrato che lo abbia come lato.
Disegniamo il segmento, ai suoi bordi (che sono due) si disegnano su ciascuno un segmento uguale; al bordo esterno dei segmenti aggiunti si disegni un nuovo segmento uguale.



Quattro segmenti disposti attorno a uno dato, tutti uguali fra loro.

Ora è facile “ripiegare” la figura per riavere il quadrato di partenza.
Lo stesso è possibile partendo dal punto (0D); ai suoi bordi si dovrebbero applicare dei punti, ma il punto, avendo dimensione zero, non ha bordi; allora ci limitiamo a immaginare un altro punto oltre a quello di partenza; abbiamo dunque 2 punti che costituiscono un segmento.
La formula che sta nascendo è dunque costituita come segue:
l’oggetto matematico di partenza (1) + tanti oggetti uguali quanti sono i suoi bordi + un ulteriore oggetto identico a quello di partenza;
nel caso del punto: 1+0+1=2 (risultato: segmento, composto da 2 punti)
nel caso del segmento: 1+2+1=4 (risultato: quadrato, composto da 4 lati - segmenti)
nel caso del quadrato: 1+4+1=6 (risultato: cubo, composto da 6 facce - quadrati). Se vogliamo ora passare al caso 4D, cioè all’ipercubo, possiamo ipotizzare una situazione aritmetica dello stesso tipo: 1+6+1, ossia:
il cubo di partenza + 6 cubi identici attaccati alle 6 facce del cubo + 1 cubo attaccato a una faccia di un cubo esterno.



Otto cubi disposti attorno a uno di loro, tutti uguali fra loro.

Questa immagine, dunque, rappresenterebbe, proiettato in 3D, un ipercubo 4D; ma siccome il foglio che ospita tutto ciò è 2D, quella che possiamo vedere qui non è altro che la rappresentazione in 2D della rappresentazione in 3D dell’ipercubo 4D.
Se ora si torna ad ammirare l’opera *Crocefissione, corpo ipercubico* di Salvador Dalì, la meraviglia non può più essere solo legata alla questione artistica, ma anche all’abilità e alla competenza matematica nascosta, non evidenziata, posta nel titolo dell’opera, data per scontata in chi esegue e in chi ammira …

### 3. “Forma” in scienza e in poesia

Ci piace proporre qui alcune considerazioni relative all’idea di forma, fornite da matematici e non.
Che cos’è la forma?
René Thom (1923 – 2002): una discontinuità qualitativa su un sostrato continuo.
Giuseppe Di Napoli: un’astrazione librata tra l’idea e la materia.
E sulle relazioni fra scienza e poesia:

Leonardo Sinisgalli (1908 – 1981): «La scienza e la tecnica ci offrono ogni giorno nuovi ideogrammi, nuovi simboli, ai quali non possiamo rimanere estranei o indifferenti, senza il rischio di una mummificazione o di una fossilizzazione totale della nostra coscienza e della nostra vita (…). Scienza e poesia non possono camminare su strade divergenti. I poeti non devono aver sospetto di contaminazione. Lucrezio, Dante e Goethe attinsero abbondantemente alla cultura scientifica e filosofica dei loro tempi senza intorbidare la loro vena. Piero della Francesca, Leonardo e Dürer, Cardano, Della Porta e Galilei hanno sempre beneficiato di una simbiosi fruttuosissima tra la logica e la fantasia».

**4. Semiotica**

Un altro formidabile legame tra Arte figurativa e Matematica ha a che fare con problemi relativi alla Semiotica. In Arte figurativa è ovvio che questi siano onnipresenti, ma non tutti li riconoscono nella Matematica. È uno dei temi che hanno sollevato i recenti studi in Didattica della matematica e che ora sono evidenti.

Quando si parla di teoria del significato, il pensiero corre rapido alla Psicologia, alla Semiotica, alla Linguistica o alla Matematica.

Ma non si deve pensare che questo tipo di problematiche interessi solo questi settori di ricerca e di analisi. Ogni disciplina che si rispetti, che voglia mettere in campo una riflessione sugli oggetti del proprio conoscere e del proprio specifico rappresentare, prima o poi è costretta a entrare nei meriti della questione. Tanto più se si serve di rappresentazioni del significato (locuzione che, per ora, usiamo in modo ingenuo), com'è costretta a fare la Matematica (Duval, 1993; D'Amore, 2000, 2001a, b, c, 2003a).

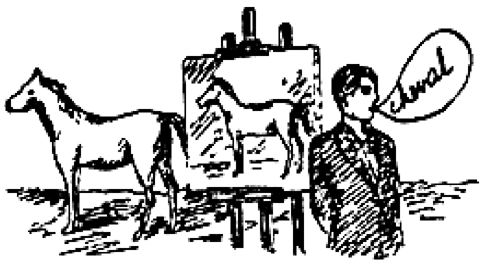
In Matematica, infatti, a causa del fatto che gli "oggetti" evocati non hanno natura reale (in un realismo ingenuo a carattere cosale), non si può fare altro, se non ricorrere a *rappresentazioni* di essi all'interno di una Semiotica opportuna; cosicché il matematico, mentre cita e parla di oggetti nel dominio della Matematica, di fatto sceglie, manipola e trasforma loro rappresentazioni (concrete) in registri semiotici.

Un caso del tutto analogo alla Matematica, forse inatteso per i più, è decisamente costituito dall'Arte figurativa. Se anche non si vuol complicare la questione e si assume, in modo decisamente acritico e storicamente superato, che l'arte sia lo studio delle interpretazioni delle rappresentazioni figurali problematiche degli oggetti e dei fenomeni della natura, ovviamente soprattutto compresa quella umana, appare piuttosto evidente che ogni rappresentazione nel mondo figurale allude a un oggetto o a un fenomeno, ma è distinto da essi. Ogni prodotto artistico è, alla fine, esso stesso un oggetto o un fenomeno della natura.

Così, apparve subito necessaria e rivelatrice l'opera di riflessione sulla natura del linguaggio dell'arte e sul senso del rapporto tra significato e rappresentazione, del geniale pittore surrealista belga René Magritte (1898 - 1967). Queste sue riflessioni spesso costituivano a loro volta vere e proprie opere d'arte, come la celeberrima *Ceci n'est pas une pipe*, che Magritte realizzò in diverse versioni tra il 1929 e il 1946.


René Magritte, *Ceci n'est pas une pipe*, varie versioni tra il 1929 e il 1946.

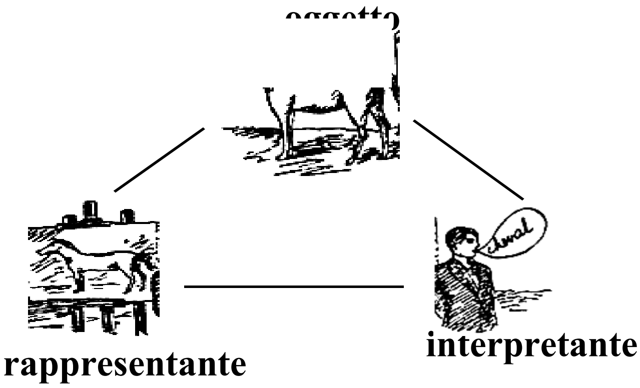
Al di là dell’imbarazzo che creò al suo apparire esposta, vista con gli occhi critici e acuti di oggi, il senso di questa opera, volutamente divulgativa, è del tutto evidente: quel che l’osservatore ha di fronte a sé NON è una pipa, infatti, ma una sua rappresentazione che a una pipa allude; quel che si vede, insomma, è una rappresentazione, un’allusione, un’evocazione, non l’oggetto in sé.
A volte, invece, Magritte ama elaborare veri e propri studi teorici, come l’altrettanto famoso *Les mots et les images* (1929) che, pur essendo, come dicevamo, uno studio teorico, venne anch’esso esposto come opera.
All’interno di questo studio, forse il particolare più famoso e discusso è quello relativo all’immagine del cavallo la cui evidenza è totale. Vi appare un cavallo, una sua rappresentazione pittorica, una sua enunciazione verbale (nel registro semiotico “linguaggio orale”). Non bisogna dimenticare, però, che il cavallo che appare alla sinistra dello schizzo è, a sua volta, un disegno.



René Magritte, *Les mots et les images*, 1929. Particolare.

Questa analisi del linguaggio pittorico non può non richiamare alla mente l’opera del logico matematico tedesco Gottlob Frege (1848 - 1925). Insieme ad altre immortali opere, Frege scrisse un articolo relativo alla natura e al senso della Matematica e del suo linguaggio: *Über Sinn und Bedeutung* (*Senso e denotazione*, pubblicato nel 1891); esso fu una vera e propria bomba nel mondo della riflessione matematica e contribuì ad aprire la strada a quel periodo di ripensamento critico che va sotto il nome di *Crisi dei fondamenti* e che portò al modo attuale di concepire la Matematica (D’Amore & Matteuzzi, 1975).
In tale articolo, che fu poi l’occasione di una polemica annosa con Giuseppe Peano, Frege proponeva in maniera netta una distinzione tra “concetto” e “oggetto” secondo la quale il primo è un’espressione che non denota in modo specifico avendo solo caratteristiche funzionali, e il secondo ha ruolo di argomento. Per esempio, un numero viene identificato con l’oggetto denotato da un concetto, ovvero con l’estensione di quel concetto.
Nell’altra sua celebre opera, *Die Grundlagen der Arithmetik-Eine logisch-matematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, pubblicata a Breslavia nel 1884, a p. 59 Frege afferma: «L’attribuzione di un numero contiene sempre un’affermazione intorno a un concetto. La cosa risulta particolarmente chiara per il numero 0. Quando si dice “Il pianete Venere ha 0 satelliti”, non vi è proprio alcun satellite o aggregato di satelliti intorno a cui possa venir affermato qualcosa. È invece al concetto “satellite di Venere” che l’asserto anzidetto attribuisce una proprietà (cioè quella di non comprendere nessun oggetto sotto di sé)».
Questa posizione, che non esitiamo ad annoverare tra quelle oggi cosiddette “realiste”, ebbe un grande successo fino agli anni ’70 del XX secolo, ma è attualmente in crisi a favore di posizioni “pragmatiste” (D’Amore, 2001a, c; D’Amore & Fandiño Pinilla, 2001).
Fin dal 1883, dunque *prima* di Frege, il matematico, fisico e filosofo statunitense Charles Sanders Peirce (1839 – 1914) aveva già cominciato a servirsi di schemi a forma triangolare per studiare le relazioni tra gli oggetti e le loro rappresentazioni, usando la terna: interpretante – rappresentante – oggetto. Ci sembra interessante trovare una descrizione della riflessione di Magritte secondo lo schema di Peirce (per una visione moderna della Semiotica, specie in versione matematica a uso

scolastico, si può vedere: D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, 2013, il cui primo capitolo è un excursus storico dalle origini della Semiotica ai giorni nostri).




Lo schema triangolare di Peirce applicato all'opera di Magritte.

Ma chi vuole, può creare la propria interpretazione ternaria del "cavallo" di Magritte, usando il triangolo di

- Gottlob Frege: Sinn (senso) – Zeichen (espressione) – Bedeutung (denotazione), pubblicato nel 1892, come abbiamo già detto,

o quelli più recenti di

- Charles Kay Ogden (1889 – 1957), Ivor Armstrong Richards (1893 – 1979): referenza – simbolo – referente (pubblicato nel 1923).

Soffermandoci ancora per un momento sul mondo dell'Arte figurativa, facciamo nostra la tesi sostenuta dal grande storico dell'arte Filiberto Menna (1926 – 1988) (1975), secondo il quale la linea analitica dell'Arte moderna ha avuto negli studi e nelle riflessioni di Magritte un grande artefice. «(…) Magritte propone uno scollamento tra immagine e parola, tra definizione visiva (l'immagine della pipa) e definizione verbale (l'affermazione "Ceci n'est pas une pipe"), sconfessando il ruolo assertivo tradizionalmente attribuito al quadro in virtù della presenza (implicita o esplicita) di una didascalia (…) Dell'arte, egli ci dice, e del quadro in particolare, non è possibile predicare il vero e il falso e per dimostrare questo assunto affronta la questione dai fondamenti gnoseologici stabiliti dalle leggi della teoria dell'identità (…)» (Menna, 1975, pp. 58-59).
L'idea di Magritte ha avuto un lungo seguito (non ancora spento) tra gli artisti di tutto il mondo, specie tra coloro che, negli anni '60 - '80, sono stati gli artefici della corrente cosiddetta del "concettuale scientifico", tra i quali ricordiamo qui solo lo statunitense Joseph Kosuth, citando due delle sue opere più famose: *Neon Electrical Light English Glass Letters White Eight* (1965) e *Three Chairs* (1965).
Il contenuto della prima opera è quanto descritto nel titolo, nel senso *esatto* di questa frase. Si tratta, cioè, di un riferimento autonimo, cioè il cui "senso" è il riferimento a sé stesso, come accade per la maggior parte dei segni della Matematica.
La seconda opera consiste in un oggetto (una sedia), la foto di tale sedia e la definizione di "sedia" tratta da un dizionario; non può non richiamare alla mente una sintesi delle opere di Magritte e Frege allo stesso tempo. Si tratta (della rappresentazione) di "una stessa" o di "tre diverse" sedie?

Per avere ulteriori riferimenti critici sull'arte figurativa dell'epoca, si possono vedere i già citati D'Amore e Menna (1974), D'Amore e Speranza (1977), D'Amore (2015); la storia di quel periodo (1970-1990) è ottimamente descritta da Giorgio Di Genova (1993), uno dei massimi studiosi di storia dell'arte.

**Bibliografia**

D’Amore, B. (2000). “Concetti” e “oggetti” in Matematica. *Rivista di Matematica dell’Università di Parma*, *6*(3), 143-151.

D’Amore, B. (2001a). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione “ingenua” in una teoria “realista” vs il modello “antropologico” in una teoria “pragmatica”. *La matematica e la sua didattica*, (1), 4-30.

D’Amore, B. (2001b). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*, (2), 150-173.

D’Amore, B. (2001c). *Scritti di Epistemologia Matematica. 1980-2001*. Bologna: Pitagora.

D’Amore, B. (2002). Gérard Vergnaud. Voce sull’*Enciclopedia Pedagogica*. Appendice A-Z. 1508-1509. Brescia: La Scuola Ed.

D’Amore, B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*, *23*(1), 47-51.

D’Amore, B, (2015). *Arte e matematica. Metafore, analogie, rappresentazioni, identità fra due mondi possibili*. Bari: Dedalo.

D’Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2001). Concepts et objects mathématiques. In: Gagatsis A. (Ed.) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*. Nicosia (Cipro): Intercollege Press Ed. [Atti del “Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, Nicosia, Università di Cipro, 22 giugno - 6 luglio 2001. 111-130].

D’Amore, B., & Matteuzzi, M. (1975). *Dal numero alla struttura*. Bologna: Zanichelli.

D’Amore, B., & Menna, F. (1974). *De Mathematica*. Roma: L’Obelisco. [Libro - catalogo di una mostra internazionale].

D’Amore, B., & Speranza, F. ed altri (1977). *Alcuni aspetti della critica analitica. Rapporti tra critica analitica e ricerca nelle arti visive*. Bologna: Galleria d’arte moderna. [Atti di un convegno, atto di nascita del filone dell’*arte esatta* che diede vita a una quantità elevata di mostre].

Di Genova, G. (1993). *Storia dell’arte italiana del ‘900*. Bologna: Bora.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

Menna. F. (1975). *La linea analitica dell’arte moderna*. Milano: Einaudi.

# Riflessioni

Riflessioni sulla didattica, principalmente interdisciplinare.

# L’interpretazione delle informazioni visuali in Matematica

**Pier Luigi Ferrari**
Università del Piemonte Orientale

pierluigi.ferrari@uniupo.it

**Sommario.** Questo lavoro affronta il tema delle difficoltà degli studenti in matematica nel passaggio da secondaria a università, con particolare riguardo all’interpretazione delle immagini. Si cerca di spiegare l’apparente contraddizione tra una convinzione diffusa e la realtà. La convinzione diffusa sostiene che la presenza di immagini nella comunicazione matematica è gradita agli studenti e favorisce la comprensione. La realtà sembra indicarci le crescenti difficoltà delle matricole nell’interpretazione di dati basati su immagini. Nel contributo vengono discussi alcuni esempi di difficoltà e ne viene proposta un’interpretazione che tiene conto sia dei risultati della linguistica funzionale, sia della teoria dei concetti figurali di Fischbein.

**Abstract.** This work addresses the issue of students' difficulties in mathematics in the transition from secondary to university, with particular regard to the interpretation of images. An attempt is made to explain the apparent contradiction between a widespread belief and reality. The widespread belief holds that the occurrence of images in mathematical communication is welcome to students and promotes their understanding. Reality provides us data that seem to indicate the growing difficulties of freshman students in interpreting visual data. The contribution discusses some examples of difficulty and an interpretation is proposed that takes into account both the results of functional linguistics and Fischbein's theory of figural concepts.

## 1. Introduzione

Le difficoltà in matematica degli studenti nel passaggio da secondaria a università è un tema che suscita un interesse crescente. Le difficoltà specifiche di questo passaggio possono dipendere da aspetti metacognitivi (che riguardano la gestione del proprio apprendimento e delle verifiche), aspetti non cognitivi (i sistemi di convinzioni circa la matematica e il suo apprendimento, o le emozioni che essa suscita), aspetti linguistici (la comprensione e produzione di testi multimodali), aspetti legati a conoscenze e abilità specifiche (quantità di tempo e impegno richiesti per passaggi che potrebbero essere automatici). In questo contributo mi occupo soprattutto delle difficoltà legate all’interpretazione e uso delle immagini.

Il ruolo delle immagini in educazione matematica è un nodo non ancora risolto e nemmeno affrontato sistematicamente. Da un lato è convinzione comune che esse giochino un ruolo sempre più ampio nella comunicazione e nell’apprendimento, e che i giovani preferiscano testi ricchi di immagini. Qualche volta si arriva a sostenere che ‘un’immagine vale più di cento parole’. D’altro canto, l’esperienza di insegnamento indica che l’interpretazione e l’uso di immagini in contesto matematico presenta difficoltà crescenti per un gran numero di studenti. Queste due posizioni sono in stridente e non ancora risolta contraddizione.

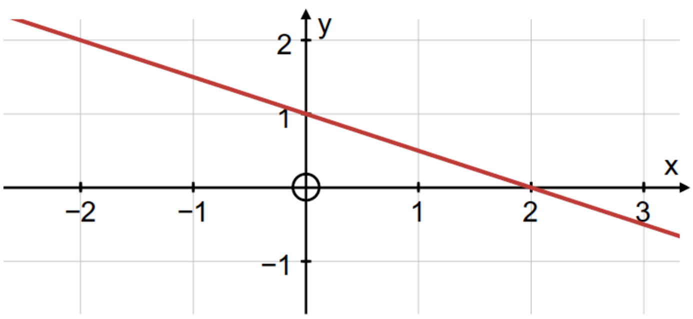
Le difficoltà riguardano sia gli aspetti strettamente figurali, sia le interazioni tra immagini, formule e testi verbali. In questo lavoro discuto alcuni esempi di problemi, che mettono in gioco immagini di tipo diverso, assegnati all’inizio di corsi universitari di area scientifica, insieme ai risultati sperimentali. Successivamente cerco di dare una spiegazione di questi fenomeni basandomi su alcune idee della linguistica pragmatica[1] che sono compatibili con la teoria dei concetti figurali di Fischbein (1993)[2].

Partiamo da qualche esempio.

*1.1 Il grafico della retta*

Problema 1

Considera la retta r rappresentata sotto. Una delle equazioni elencate corrisponde alla retta. Quale?




Scegli un’alternativa:

- ○ $x+2y-2=0$
- ○ $x-y+1=0$
- ○ $x+y-2=0$
- ○ $2x+2y-1=0$
- ○ $2x+y-2=0$

Problemi di questo tipo sono stati assegnati nelle prove di valutazione delle competenze iniziali per diversi corsi di area scientifica dell’Università del Piemonte Orientale dal 2017 al 2019, complessivamente a oltre 2000 matricole. Le percentuali di risposte corrette hanno oscillato tra il 38% e il 50%, e solo in un caso sono arrivate al 52%. In tutte le varianti il distrattore di gran lunga più popolare è stato quello in cui i coefficienti della x e della y erano scambiati. Questo, nel caso illustrato, corrisponde alla quinta scelta.

Essendo un problema a scelta multipla, gli studenti dovevano solo riconoscere l’equazione appropriata e potevano farlo o attraverso la costruzione dell’equazione partendo da punti letti sul grafico, oppure per esclusione, provando a sostituire nelle equazioni le coordinate di punti che stanno sulla retta. Nel caso illustrato, ad esempio, la sostituzione di 0 per x e 1 per y consente di escludere le ultime tre equazioni, mentre sostituendo 2 per x e 0 per y si esclude la seconda.

*1.2 Il piano cartesiano*

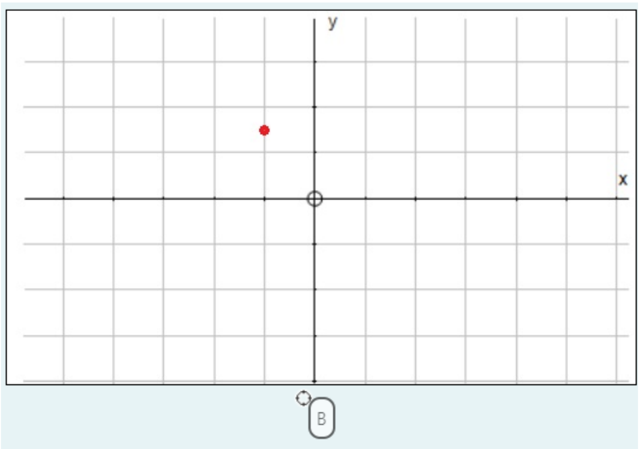
Anche il problema che segue e le varianti riportate di seguito sono stati assegnati in più edizioni della prova di valutazione delle competenze iniziali di cui sopra, a più di 3000 matricole.

---

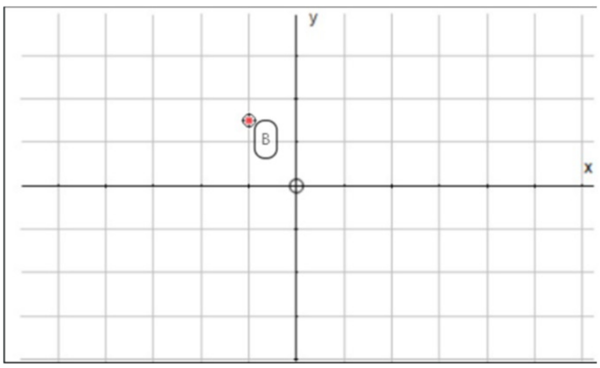
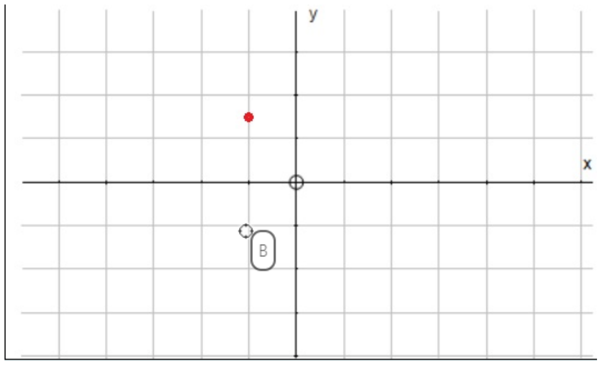
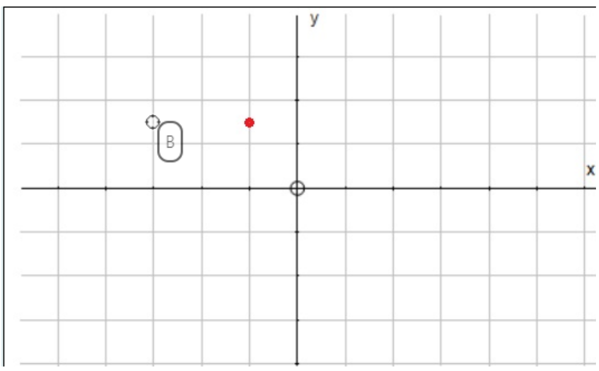
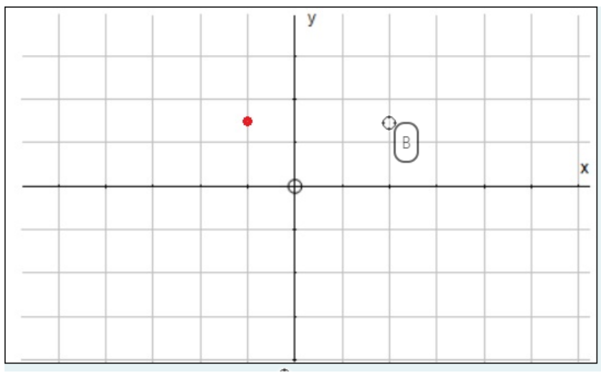
[1]Alcune idee della pragmatica e della linguistica funzionale sono state applicate alla matematica da Ferrari (2021).

[2]A questo proposito si vedano anche i contributi di Sbaragli (2006) e Mariotti (2015).

Problema 2.1

| | |
|---|---|
| Nel diagramma è rappresentato il punto di coordinate *(x;y)*. Trascina l’etichetta B (che si trova in basso) in modo che corrisponda (col suo circolino in alto a sinistra) al punto di coordinate *(−x; y)*. |  |

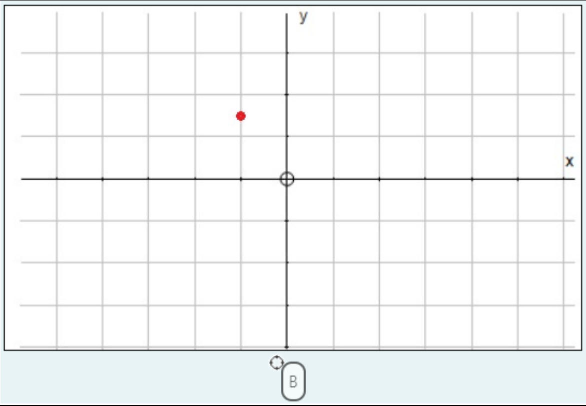
Questa variante ha avuto percentuali di successo relativamente alte, tra il 60% e il 70%. Vediamo qualche esempio di risposta sbagliata.

| | |
|---|---|
| A  | B  |
| C  | D  |

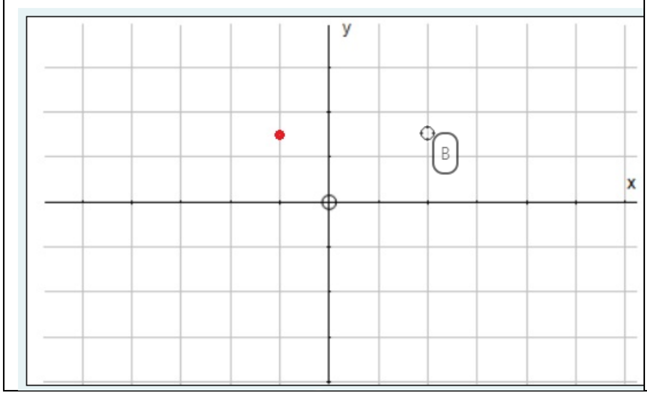
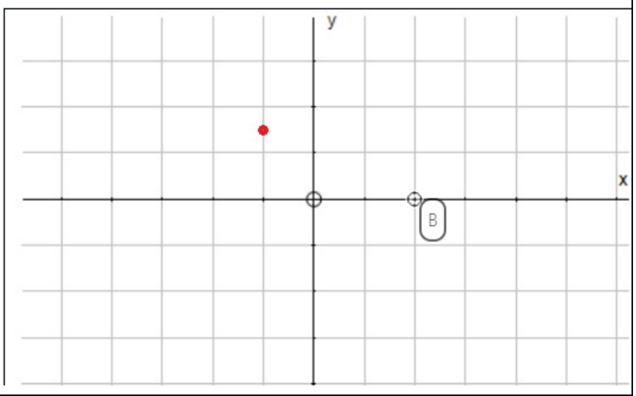
Nella maggior parte delle risposte sbagliate il punto è collocato nel semipiano delle x negative. Tra gli esempi presentati, nella A il punto è lasciato invariato mentre nella C è nettamente spostato a sinistra. In questi casi sembra esserci una grossa difficoltà ad accettare che il valore −x possa essere positivo. Nella B è stata lasciata invariata l’ascissa mentre è stato cambiato il segno dell’ordinata (in modo impreciso). Nella D il punto è stato collocato nel quadrante appropriato ma in posizione sbagliata.

Vediamo qualche altra variante.

Problema 2.2

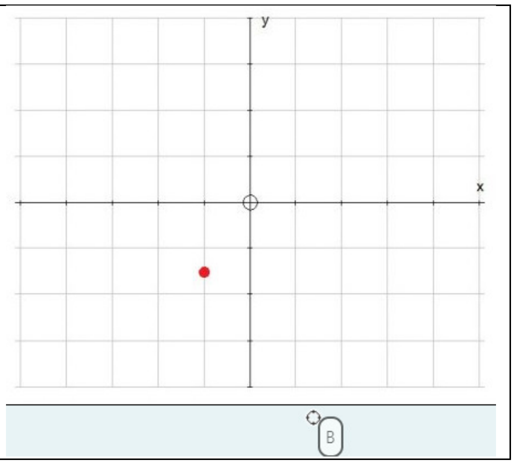
| | |
|---|---|
| Nel diagramma è rappresentato il punto di coordinate (x; y). Trascina l’etichetta B (che si trova in basso) in modo che corrisponda (col suo circolino in alto a sinistra) al punto di coordinate (2x; y). |   |

Questa variante (che non prevedeva cambiamenti di segno) ha avuto percentuali di successo tra il 40% e il 50%. Vediamo sotto le due risposte sbagliate più popolari.

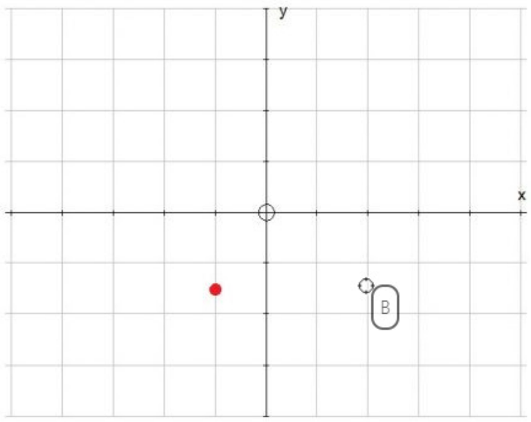
| E | F |
|---|---|
|   |   |

Nelle risposte E ed F l’ascissa del punto trasformato è |2x| invece che 2x. Nel caso di E l’ordinata è appropriata, mentre in F diventa 0.

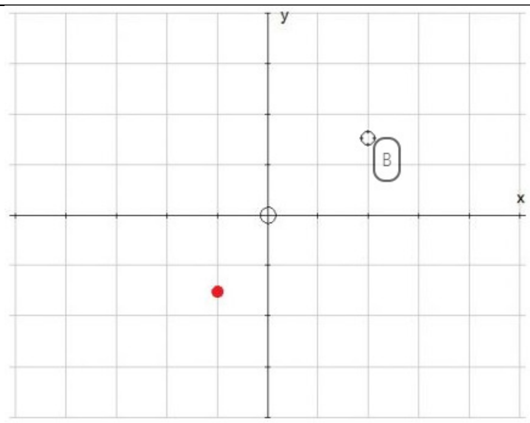
Problema 2.3

| | |
|---|---|
| Nel diagramma è rappresentato il punto di coordinate *(x;y)*. Trascina l’etichetta B (che si trova in basso) in modo che corrisponda (col suo circolino in alto a sinistra) al punto di coordinate *(2x; −y)*. |   |

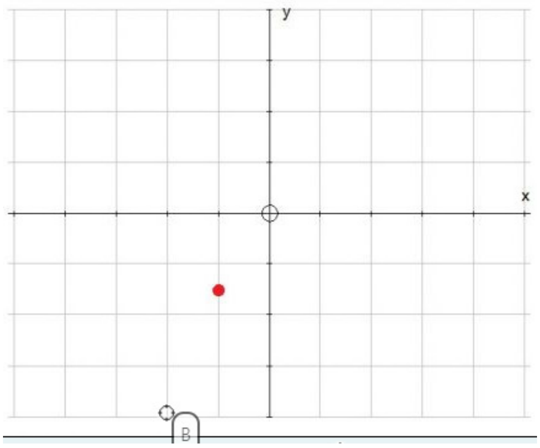
Questa variante ha avuto percentuali di successo tra il 35% e il 45%. Vediamo sotto le risposte sbagliate più popolari.



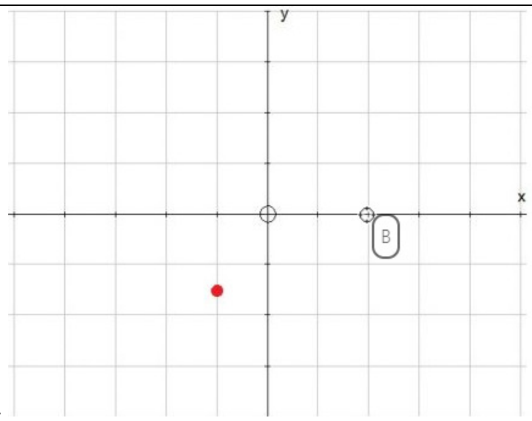
G



H



I



L

Qui abbiamo la risposta G che propone il punto di coordinate (−2x; y), cioè un punto con ascissa positiva e ordinata negativa, come se il segno di tali numeri fosse determinato dalla presenza o dall'assenza del segno '−' davanti. Nelle risposte H e I una delle coordinate (rispettivamente la y e la x) è determinata correttamente mentre l'altra ha il segno sbagliato (nel caso di I è sbagliato anche il valore assoluto della y). Nella L abbiamo l'errore di segno per la x e il valore 0 per la y. Il posizionamento del punto richiesto su uno degli assi coordinati è una delle scelte più frequenti nelle risposte sbagliate a tutte le varianti di questo problema.

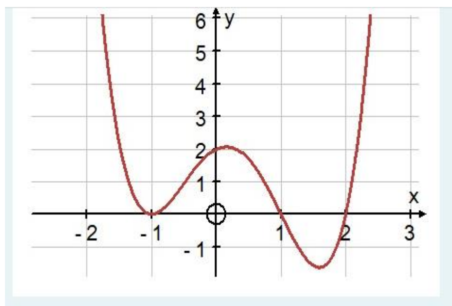
Vediamo un diverso esempio.

*1.3. Leggere i grafici*

Problema 3.1

Considera il grafico della funzione *f* riportato a destra. Tra le relazioni elencate sotto indica tutte e sole quelle verificate da *f*.
Scegli una o più alternative.

- $f(0) = 0$
- $f(0) > f(2)$
- $f(1) < f(2) + 1$
- $f(1) = f(0)$
- $f(-1) = -1$



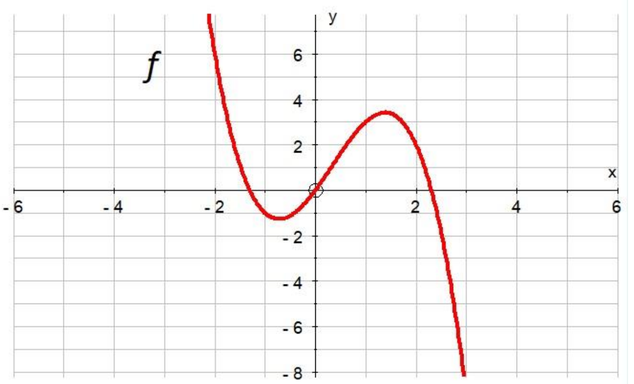
Qui gli studenti ricevevano 0,25 punti per ogni scelta corretta (cioè la seconda o la terza opzione) e una penalità di 0,17 per ogni scelta sbagliata. Quindi, ad esempio, chi sceglieva soltanto le due opzioni corrette prendeva 0,5 punti, che ne sceglieva due corrette e una sbagliata prendeva 0,33, chi ne sceglieva una corretta e una sbagliata prendeva 0,08. Non era comunque prevista la possibilità di punteggi negativi, quindi chi metteva, a esempio, solo risposte sbagliate, oppure una corretta e due sbagliate prendeva 0. Su un campione di circa 500 partecipanti il punteggio medio è risultato 0,23. Qui c’è stato un certo equilibrio fra i tre distrattori [$f(0) = 0$; $f(-1) = -1$; $f(1) = f(0)$]. In effetti corrispondono tutti a relazioni vere se si trascura una occorrenza della ‘$f$’.

Vediamo un’altra variante.

Problema 3.2

Considera il grafico della funzione $f$ riportato a destra. Tra le relazioni elecate sotto indica tutte e sole quelle verificate da $f$.
Scegli una o più alternative.

- $f(1) < 2$
- $f(-2) < f(2)$
- $f(-2) > 1$
- $f(0) < f(-2)$
- $f(1) > f(2)$



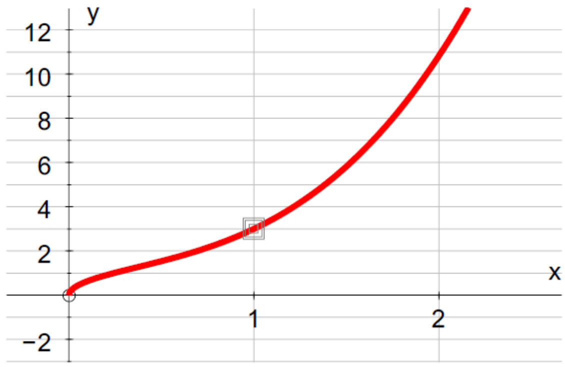

In questa variante il punteggio medio è risultato 0,22. Qui le opzioni corrette erano tre (la terza, la quarta e la quinta) e la distribuzione dei punteggi e delle penalità era adattata a questa configurazione. Anche qui solo pochi studenti indicano tutte le opzioni corrette. Il distrattore preferito è di gran lunga il secondo [$f(-2) < f(2)$].

*1.4. Descrivere i grafici*

Consideriamo i seguenti problemi, assegnati a un gruppo di matricole di Scienze Biologiche in una prova scritta.

Problema 4

Considera $f(x)=x^3+2\sqrt{x}$. Spiega perché $x=1$ non può essere un punto di massimo per $f$.



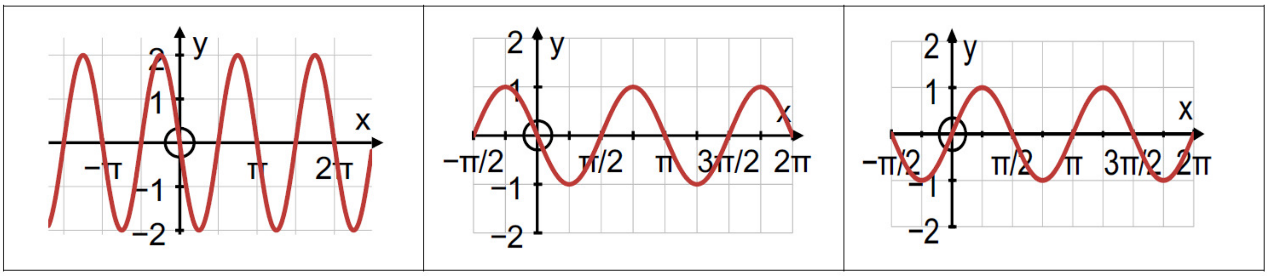

Lo scopo del problema 4 era verificare la capacità di usare la lingua per argomentare in situazioni matematicamente molto semplici.

Gli studenti hanno incontrato molte difficoltà a elaborare un testo argomentativo. Ecco due esempi.

*“Il punto di massimo di f è crescente a destra. Se deve essere massimo, il punto deve crescere a sinistra.”*
*“x=1 non può essere un punto di massimo di f, poiché il dominio comprende dei valori sempre positivi che vanno da 0 a +∞.”*

Problema 5

Considera la funzione *f* di equazione *f(x)*= sin (2*x*+π). Fra i tre grafici rappresentati sotto individuane due che sicuramente non corrispondono a *f*. Spiega.




Ed ecco un paio di esempi di risposte tipiche.

*“Non può essere il primo grafico perché il seno esiste solamente tra −1 e 1”*
*“Il dominio del seno è [−1, 1], quindi escludiamo il primo grafico”*

Gli esempi di risposte ai problemi 4 e 5 sono particolari. Anche se non tutti gli studenti si esprimono in quel modo, è comunque comune trovare descrizioni imprecise, vaghe o comunque poco utili per ragionare sui problemi.

**2. Un primo bilancio**

Da tutti gli esempi visti finora possiamo trarre qualche conclusione. Va detto che le percentuali di successo o i punteggi medi dati per i problemi 1-3 (e varianti) sono puramente indicativi, in quanto non avevamo nessuna forma di controllo statistico sui campioni coinvolti, che avrebbero potuto anche non essere omogenei.

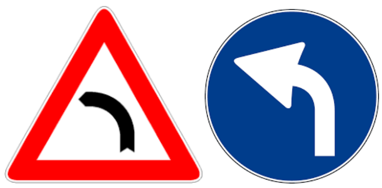
Dalle difficoltà relative ai problemi 1, 2 e 3 emergono, in misure diverse, difficoltà nella comprensione dei significati delle rappresentazioni. Gli errori sui problemi come il n. 1 (associazione di un’equazione al grafico di una retta) potrebbero essere evitati conoscendo i metodi appropriati, ma anche attraverso qualche sostituzione. Quest’ultima operazione richiede aver compreso il significato di un grafico, o se si preferisce la relazione tra l’equazione, il grafico e le coordinate dei punti che lo compongono. Lo stesso vale per i problemi 2.1 - 2.3. A questo proposito va detto che la variante 2.1 ha sistematicamente avuto risultati migliori delle altre. Questo potrebbe dipendere dal fatto che richiede soltanto un cambio di segno, mentre le altre richiedono altre trasformazioni, per quanto semplici. In gran parte delle risposte sbagliate sembra pesare la difficoltà di riconoscere come positivo un numero rappresentato da un’espressione che inizia con ‘−’ o, simmetricamente, come negativo un numero rappresentato da un’espressione che non inizia con ‘−’.
Questa difficoltà, che sposta sul piano sintattico una proprietà (il segno delle coordinate di un punto) che potrebbe essere ricavata semplicemente dall’osservazione del diagramma, sembra crescere insieme alla complessità delle espressioni coinvolte. Probabilmente il significato anche di una semplice moltiplicazione per 2 sul piano cartesiano non è del tutto padroneggiato da molte matricole. Anche i risultati dei problemi 3.1, 3.2 e varianti danno indicazioni simili. Qui è il significato

fondamentale di funzione che è incerto. Le difficoltà segnalate dagli esempi di risposte ai problemi 4 e 5 sono simmetriche rispetto a quelle discusse nei problemi 1-3. Se da quelli emerge la scarsa padronanza dei significati delle rappresentazioni, da questi emerge l'incapacità di rendere tali rappresentazioni oggetto di un discorso razionale e quindi di usarle come strumenti del pensiero.

## 3. Due modi di usare le immagini

Torniamo alla questione originaria, cioè alla contraddizione tra convinzioni diffuse sull'opportunità di usare molte immagini e l'esperienza di insegnamento che ammonisce sulle difficoltà collegate. La contraddizione potrebbe dipendere dal fatto che buona parte delle immagini da cui siamo circondati vengono usate in modi nettamente diversi rispetto agli usi matematici. La linguistica ci fornisce uno strumento efficace con l'idea di *inferenza*. In base a questa prospettiva, i testi vengono interpretati non solo analizzandoli in base alla grammatica e applicando le proprie conoscenze lessicali (il *dizionario*) ma anche sviluppando inferenze con cui l'ascoltatore o il lettore si sforza di esplicitare le informazioni implicite nel testo, utilizzando le sue conoscenze (l'*enciclopedia*)[3] e le sue convinzioni su chi produce il testo, sul tema, sul contesto in cui è stato prodotto e facendosi influenzare dalle emozioni che il testo può suscitare. Un testo può essere più o meno cooperativo, in quanto può richiedere una quantità minore o maggiore di inferenze o può guidare più o meno esplicitamente il ricevente a svolgere le inferenze necessarie per comprenderlo. Tutto questo vale anche per le immagini. Quindi, come per le altre rappresentazioni, l'interpretazione di immagini può richiedere inferenze, che a loro volta si basano sull'enciclopedia di chi le deve sviluppare. Molte delle immagini che vengono usate nella comunicazione quotidiana sono caratterizzate dal fatto di richiedere poche inferenze, mentre le immagini usate in matematica (ma anche nella comunicazione scientifica in genere) ne richiedono di solito molte di più.

I segnali stradali, ad esempio, sono progettati in modo da rendere minima la quantità di inferenze richieste (e quindi anche l'enciclopedia). Nel caso dei segnali sotto, il fatto che si tratta di curva, o svolta, a sinistra è comunicato iconicamente, mentre la differenza tra i due segnali (di pericolo il primo, di obbligo il secondo) è comunicata in modo convenzionale, attraverso la forma e il colore del cartello, in modo comunque ben marcato percettivamente.

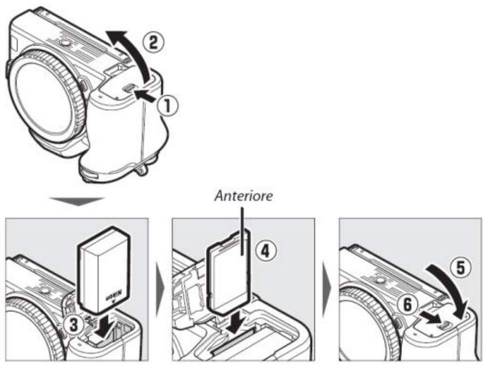


Nei simboli riportati sotto, che significano 'ospedale' il legame con il messaggio che vogliono trasmettere è diverso. Nel caso del simbolo a sinistra ('H') il legame col significato è puramente mnemonico (almeno nei paesi in cui la parola che designa un ospedale non comincia per 'H').


Nel caso del simbolo a destra il legame è più analogico, in quanto il letto può richiamare l'ospedale (ma anche l'albergo o altro). La croce rossa, che disambigua la rappresentazione, è convenzionalmente associata a questioni legate alla sanità. Quest'ultimo aspetto, che dovrebbe far parte dell'enciclopedia di quasi tutti gli individui adulti, può essere comunque facilmente memorizzato.

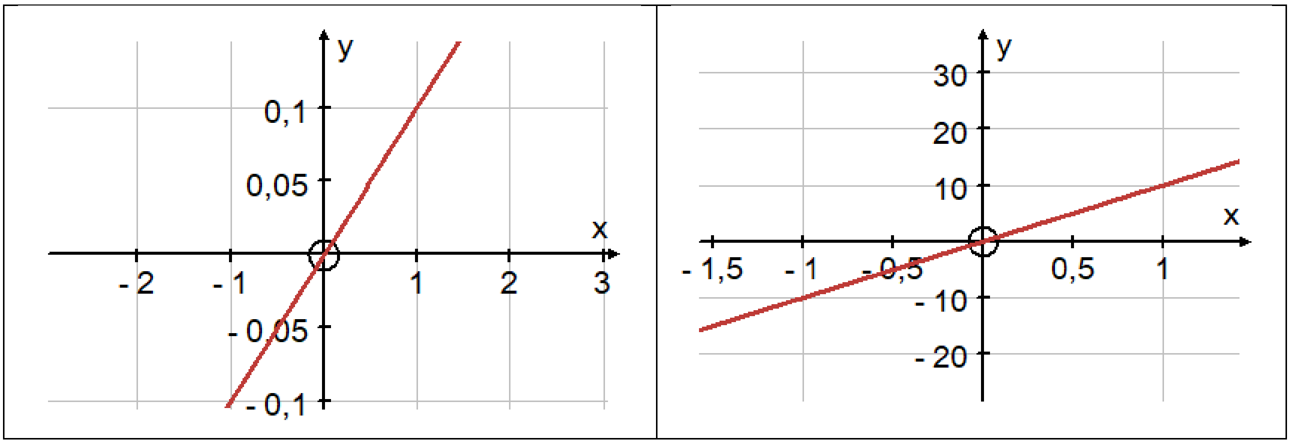
Simboli di questo tipo devono poter essere interpretati velocemente da persone di diversa lingua, cultura, competenza e stato di salute e devono richiedere pochissimo dal punto di vista di inferenze ed enciclopedia.
Per la maggior parte delle immagini di questo tipo e per la maggior parte degli individui che abbiano un minimo di esperienza, la prima interpretazione che viene in mente è quella appropriata. Sequenze di immagini sono anche utilizzate per rappresentare processi, ad esempio nei libretti di istruzioni.

Le immagini in basso illustrano il processo di inserimento di batteria e scheda di memoria in una fotocamera. La sequenza delle immagini è rigorosamente congruente a quella delle azioni da intraprendere, con il rinforzo dei numeri da 1 a 6. Con la fotocamera a disposizione è possibile ricostruire il processo usando pochissime conoscenze e svolgendo inferenze estremamente semplici.



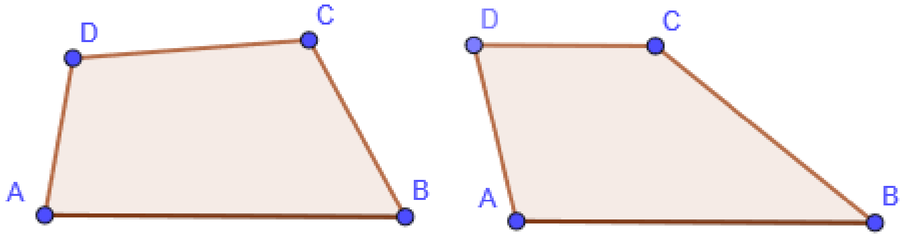

Questa è una situazione in cui le immagini sono probabilmente più efficaci delle parole. Descrivere a parole le posizioni di batteria e scheda sarebbe molto più faticoso.

L'efficacia di un'illustrazione come questa dipende comunque dalla ridotta necessità di svolgere inferenze. In queste situazioni, per un lettore con un po' di esperienza, la prima interpretazione che viene in mente è quella appropriata, visto che rappresentazioni come questa sono di solito molto cooperative e spesso realizzate da professionisti della comunicazione. Chi le utilizza è in qualche modo consapevole di questo e viene così incoraggiato a fermarsi alla prima interpretazione. L'interpretazione delle rappresentazioni visuali della matematica spesso richiede molto di più. In matematica la prima interpretazione che viene in mente non è sempre quella corretta. In altre parole, le immagini della matematica possono non essere cooperative come un segnale stradale o un libretto di istruzioni. Ad esempio, stabilire quale delle due rette riportate sotto ha la pendenza maggiore richiede un qualche ragionamento che vada oltre la prima impressione.

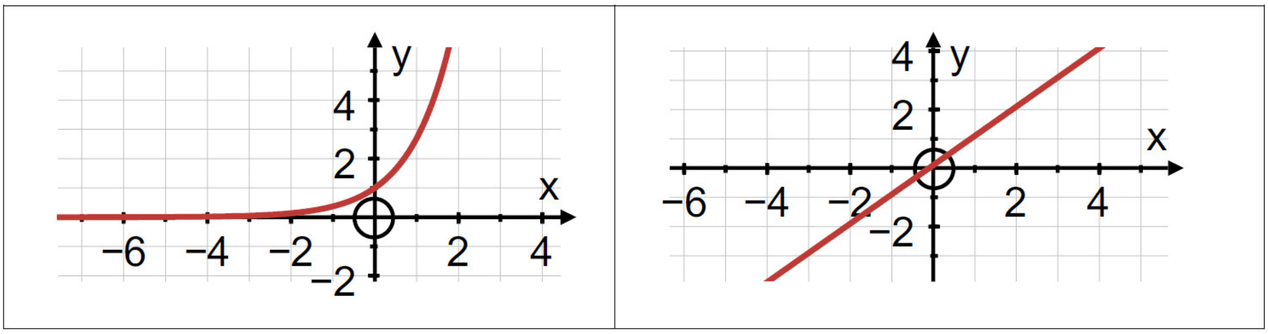


Questa non può essere considerata una pura e semplice domanda-trabocchetto da evitare nella pratica didattica. La capacità di valutare criticamente i dati e le loro rappresentazioni sta diventando sempre più importante, ed è fra gli obiettivi delle Indicazioni Nazionali per il secondo ciclo.

Questi fenomeni sono stati studiati sulla base di costrutti teorici diversi ma compatibili. Da un punto di vista semiotico possiamo mettere in luce le inferenze necessarie per interpretare un testo o un'immagine. Questo è utile per capire le caratteristiche dei segnali stradali e di altre immagini o pittogrammi comuni nella vita quotidiana e la differenza rispetto agli usi scientifici. Nella psicologia dell'educazione matematica è stata spesso utilizzata la teoria dei concetti figurali di Fischbein (citata in precedenza), in cui si sottolinea l'esigenza del controllo concettuale sulle immagini. Un'immagine la cui interpretazione richiede poche inferenze necessita anche di poco controllo concettuale, nel senso che l'informazione rilevante (ad esempio, il riconoscimento di un segnale stradale) è ricavabile prevalentemente sul piano percettivo o mnemonico. La differenza tra due segnali stradali, o tra un segnale stradale e un'altra indicazione, è ben marcata sul piano percettivo, mentre ad esempio, il fatto che la figura sotto a destra sia un trapezio, al contrario dell'altra, richiede una certa dose di controllo concettuale.




Allo stesso modo, un forte controllo concettuale è richiesto per comprendere che il grafico sotto a sinistra (della curva di equazione $y = e^x$) non si annulla per $x \leq -4$ e non ha un asintoto verticale in corrispondenza di una qualche valore positivo delle ascisse, e che il grafico sotto a destra (della retta di equazione $y=x+0{,}1$) non passa per l'origine.




Una caratteristica delle immagini, rispetto a testi o espressioni simboliche, è che lasciano al lettore una maggiore libertà di interpretazione. Sono ben noti esempi in cui questa libertà può portare a interpretazioni nettamente diverse. Al di là di queste considerazioni, restano comunque per tutte le immagini ampie possibilità di selezionarne alcune parti o aspetti e concentrarsi su quelle trascurando il resto. In moltissimi casi questo processo di selezione è inevitabile. Problemi come il 4 e il 5 non possono essere risolti con l'applicazione meccanica di un metodo ma richiedono comunque di selezionare alcuni aspetti dei grafici che sono rilevanti per la risposta. Questo mette in crisi quegli studenti addestrati ad applicare metodi in modo meccanico, o che hanno scelto autonomamente di farlo per ragioni di economia cognitiva. Le competenze richieste in questi casi sono piuttosto quelle legate all'euristica e alla modellizzazione.

In conclusione, quando si usano immagini bisogna essere consapevoli di questi due diversi modi di usarle. Le immagini della vita quotidiana ci abituano all'idea che la prima interpretazione che viene in mente sia quella buona. Quelle della matematica e della scienza in generale sono meno cooperative, spesso richiedono un processo di interpretazione più lungo e, soprattutto, più critico. Ci costringono insomma a non accettare la prima idea che ci viene in mente ma a cercare verifiche, magari confrontandole con altre rappresentazioni. Tutto questo è più faticoso ma è un passaggio obbligato per raggiungere la padronanza delle rappresentazioni di ogni genere con le quali veniamo a contatto.

**Bibliografia**

Eco, U. (1979). *Lector in fabula*, Milano: Bompiani.

Eco, U. (1984). *Semiotica e filosofia del linguaggio*. Torino: Einaudi.

Ferrari, P. L. (2021). *Educazione matematica, lingua, linguaggi. Costruire, condividere e comunicare matematica in classe*, Torino: Utet.

Fischbein E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, 24, 139-162.

Mariotti, M.A. (2015). Saper vedere in matematica alla luce della ricerca in didattica. Visualizzare in geometria come problema didattico. *La Matematica nella Società e nella Cultura*, Serie 1, Vol. 8, n.3, p. 109–142.

# Dibattito o *Debate*? Alcune riflessioni a partire da un'esperienza in classe

**Domingo Paola**
Laboratorio Didattica Matematica – DIMA Genova

domingo.paola56@gmail.com

## 1. Introduzione

Penso sia bene precisare innanzitutto che la domanda del titolo non riguarda mie eventuali perplessità sull'uso della lingua inglese per caratterizzare una pratica didattica. Con *dibattito* e *debate* intendo invece connotare due pratiche che ritengo assai differenti soprattutto per quel che riguarda le conseguenze didattiche che si possono avere scegliendo l'una o l'altra.

Per cercare di chiarire meglio quanto intendo dire, penso sia utile partire dal documento [Cinganotto, & al., 2019] che, come incipit, sceglie una frase di Joseph Joubert:
*lo scopo di una discussione o di un dibattito non deve essere la vittoria, ma il miglioramento*.
Si tratta, per me, di un incipit confortante: ne condivido pienamente significato e conseguenze.
Però, nel seguito del documento citato, molto articolato, interessante e ricco di considerazioni e spunti didattici, si leggono alcune precisazioni su come deve essere strutturato un *debate* che, a mio avviso, rischiano di giocare contro il miglioramento e focalizzare eccessivamente l'attenzione sulla vittoria.
Ne cito due in particolare:

a) l'alternanza dell'esposizione delle due posizioni contrapposte secondo regole e tempi ben precisi;

b) la presenza di una giuria che valuta le esposizioni delle due tesi contrapposte e stabilisce quella che risulta essere più convincente.

È bene precisare che gli autori chiariscono che, in particolare la condizione b), caratterizza una tipologia di *debate* che può essere definita come competitiva, contrapposta a una tipologia formativa, nella quale si adottano strategie tese a ridurre al minimo la componente competitiva.

Per esempio, nelle esperienze dell'IIS "Savoia-Benincasa" di Ancona e dell'IIS "Luca Pacioli" di Crema, descritte nel documento, si fa riferimento al dibattito formativo, anche se poi si precisa che gli istituti hanno comunque organizzato e partecipato a gare di *debate*. L'IC "Giannuario Solari", nel descrivere il format adottato per il *debate*, precisa che per le classi prime e seconde della scuola primaria, viene adottato un *debate* base che è del tutto formativo, perché "già dalle prime sperimentazioni era parso evidente che l'approccio competitivo comprometteva non solo la buona riuscita dell'attività, ma rendeva il *debate* un'attività non inclusiva" [Cinganotto & al. 2019, p. 37].

Viene però anche precisato che "il *debate* vero e proprio viene introdotto a partire dalle classi terze", dove con *debate vero e proprio* si intende evidentemente quello competitivo. Ho inoltre l'impressione che la maggior parte delle esperienze di *debate* che si trovano in rete facciano riferimento soprattutto al dibattito competitivo, praticato già da molto tempo nel mondo anglosassone, anche attraverso competizioni nazionali e internazionali.

In questo articolo mi propongo di sostenere la tesi che il dibattito competitivo (nel seguito più semplicemente *debate*, anche per il fatto che il dibattito presente nell'educazione formale e informale nei paesi anglosassoni è prevalentemente competitivo) rischi di produrre, per una sorta di eterogenesi dei fini, conseguenze didattiche diametralmente opposte a quelle che si intendono perseguire.

Viceversa, il dibattito formativo (d'ora innanzi, più semplicemente, dibattito) consente di perseguire, come scriveva Joubert, il miglioramento, cioè l'acquisizione, per tutti coloro che partecipano attivamente, di conoscenze più approfondite sull'oggetto del dibattito e competenze argomentative più solide.

Sosterrò questa tesi analizzando alcune fasi di un'attività di dibattito che ho progettato e realizzato in alcune classi di scuola secondaria di secondo grado: per esempio quella le cui prime attività sono state descritte in [Paola, 2022].

## 2. Il quadro teorico di riferimento

Il quadro teorico[1] in cui si situa l'attività di dibattito che analizzerò per sostenere la tesi sopra precisata è quello relativo all'argomentazione, in particolare all'argomentazione in classe nelle ore di matematica: ciò non deve portare alla conclusione che il processo di trarre conseguenze da una serie di premesse, che caratterizza ogni processo argomentativo, sia fondato solo o anche prevalentemente su ragionamenti di carattere deduttivo. Inferenze induttive, abduttive, uso di analogie, di metafore, esibizioni di esempi paradigmatici e di controesempi locali sono altrettanto importanti e frequenti nelle argomentazioni degli studenti nelle ore di matematica. Ciò è inevitabile, perché quasi sempre le argomentazioni non si svolgono all'interno di una teoria già sistemata, semmai hanno proprio lo scopo di contribuire a parziali e successive sistemazioni in una teoria delle conoscenze via via acquisite. Inoltre, la presenza di ragionamenti tipicamente non deduttivi è di prassi quando gli studenti argomentano su temi non strettamente matematici, utilizzando però competenze di carattere matematico per raccogliere, rappresentare e analizzare dati portati a supporto di determinate affermazioni.

Come precisato in [Perelman & Olbrechts-Tyteca, 2013] le funzioni di un'argomentazione possono essere molteplici: qui privilegio la funzione dell'argomentazione per spiegare, per chiarire a sé stessi e agli altri il perché una determinata tesi appare plausibile, ragionevole, accettabile e preferibile ad altre. Preciso quindi che l'obiettivo delle argomentazioni nelle classi di matematica non è tanto quello di convincere o di fare scelte, ma deve essere essenzialmente quello di acquisire maggiore conoscenza, motivandola, sui temi oggetto dell'argomentazione e di condividerla nella piccola comunità di apprendimento che è la classe. In altri termini, in accordo con [Mercier & Sperber, 2017] l'argomentazione ha prevalentemente una funzione sociale e quindi le argomentazioni prodotte devono essere particolarmente meditate e controllate proprio per riuscire a svolgere efficacemente questa funzione sociale.

---

[1] Un quadro teorico di riferimento per attività argomentative di questo tipo, assai più articolato e dettagliato, verrà presentato nella tesi di dottorato di Marta Saccoletto, che ha osservato attività argomentative nelle mie classi nell'a.s. 2021-2022. Si tratta di un work in progress che, attualmente, ha il titolo *Argomentazione e valutazione formativa nella scuola secondaria di secondo grado*.

Dovrebbe essere sufficientemente chiaro, da quanto finora detto, che l'argomentazione nelle classi di matematica ha ben poco a che fare, in genere, con la certificazione della verità o con la precisazione della nozione di conseguenza logica tra ipotesi e tesi che avviene con le dimostrazioni. Il ricorso alla dimostrazione va effettuato solo in casi molto particolari, in cui gli studenti possiedono una teoria adatta a certificare la validità di una certa tesi. Nella maggior parte dei casi, anche nelle ore di matematica, le argomentazioni degli studenti dovrebbero avere come obiettivo il conseguimento e la condivisione di conoscenze e competenze sui temi oggetto delle argomentazioni: in altri termini, l'argomentazione è vista come strumento privilegiato per costruire, comunicare e condividere conoscenza. Tutto ciò, come precisato in [Mercier & Sperber, 2017] è alla base della cooperazione umana e dell'attenzione all'alterità e, più in generale, caratterizza l'umanità: non può quindi non essere oggetto di particolare attenzione in una didattica che desideri offrire occasioni agli studenti per crescere umanamente e professionalmente. Quest'attenzione agli aspetti comunicativi, per far comprendere ad altri, è evidenziata anche da un matematico come William Thurston in un celebre articolo [Thurston, 1994].

Da un punto di vista più specifico e tecnico, l'attività di dibattito di cui analizzerò alcune fasi per sostenere la tesi che ho proposto nell'introduzione, fa riferimento al concetto di razionalità elaborato da [Habermas, 2001][2].
Come ho precisato anche in [Paola, 2019], Habermas individua tre componenti della razionalità, che riguardano l'agire, la validazione delle affermazioni e il comunicare. In particolare, distingue tra:
a) componente teleologica, che riguarda la scelta delle strategie per affrontare situazioni e la loro coerenza e pertinenza con una tesi da sostenere o un problema da risolvere;
b) componente epistemica, che riguarda l'uso di conoscenze pertinenti e adeguate a validare una determinata tesi;
c) componente comunicativa, che riguarda la scelta di forme di comunicazione adeguate a spiegare, convincere, chiarire.
Si noti che le tre componenti, fortemente intrecciate tra loro, richiedono tutte un impegno consapevole:

a) nel ricercare le ragioni dell'efficacia e della coerenza con la tesi delle strategie intraprese per sostenerla (componente teleologica);

b) nell'accertare la correttezza delle conoscenze utilizzate durante l'argomentazione (componente epistemica);

c) nello scegliere strumenti e tecniche di comunicazione efficaci ed efficienti relativamente al contesto in cui avviene l'argomentazione.

Si osservi che proprio questa attenzione all'impegno consapevole che Habermas pone nella caratterizzazione delle tre componenti consente, anche in fase di valutazione delle argomentazioni degli studenti, di distinguere tra impegno per realizzare un'argomentazione razionale (cioè corretta, coerente ed efficace rispetto al contesto) ed effettivo successo. Nei *debate* viene premiata l'argomentazione più convincente. Nei dibattiti possono essere premiate anche argomentazioni poco convincenti, ma in cui è chiaro ed esplicito l'impegno a realizzare un'argomentazione razionale, nel senso di Habermas, che consenta di accrescere la conoscenza condivisa sull'oggetto dell'argomentazione.

Come ho scritto in [Paola, 2019],

[2] Nella descrizione della razionalità secondo Habermas mi sono in gran parte ispirato a un documento di Paolo Boero, non pubblicato, provvisorio, dal titolo *Progetto "Educare alla razionalità"* preparato per la comunità italiana dei giovani ricercatori in educazione matematica. Naturalmente sono completamente responsabile di ogni eventuale interpretazione non corretta del suo pensiero.

"l'approccio al concetto di razionalità da parte di Habermas è a mio parere un'utile lente di ingrandimento per osservare i processi argomentativi degli studenti e riconoscere in essi punti di forza e di criticità rispetto alle tre componenti della razionalità. In altri termini consente di porsi quattro domande abbastanza precise di fronte a un'argomentazione di uno studente:
a) le conoscenze che ha utilizzato sono coerenti con la tesi che vuole sostenere?
b) Quante e quali conoscenze pertinenti alla tesi da sostenere lo studente ha utilizzato?
c) Quali forme di comunicazione ha utilizzato per farsi capire? Quali sono l'efficacia e l'adeguatezza delle espressioni linguistiche che ha scelto?
d) Lo studente è consapevole di eventuali criticità nella scelta delle conoscenze utilizzate per sostenere la tesi (sono coerenti con la tesi e a essa pertinenti)? È consapevole dell'efficacia delle forme di comunicazione utilizzate e della loro coerenza con l'obiettivo che vuole conseguire?

La stessa possibilità di porsi domande di questo tipo dovrebbe aiutare l'insegnante a valutare con più precisione e con maggiore consapevolezza punti di forza e di criticità delle argomentazioni degli studenti e quindi dovrebbe aiutarlo a dare suggerimenti puntuali e operativi agli studenti per migliorare le proprie competenze argomentative".

Mi sembra doveroso precisare che lavorare per l'affermazione di una cultura dell'argomentazione in classe non è obiettivo semplice. Richiede infatti non solo di acquisire quelle competenze interdisciplinari relative a una corretta, efficace ed efficiente gestione del discorso (con tutte le declinazioni nelle varie discipline), ma soprattutto richiede una disposizione culturale che non è acquisibile se non in tempi lunghi e grazie al contributo di tutto il consiglio di classe e, in parte, anche del contesto extra scolastico: mi riferisco allo scegliere l'argomentazione come modalità privilegiata per sostenere le proprie idee, per discuterle con gli altri in un confronto aperto, corretto, interessato alle diverse prospettive da cui si possono affrontare problemi, questioni, dibattiti. La difficoltà dell'obiettivo è resa ancora più ardua e al tempo stesso necessaria dalla pressoché totale assenza di buone argomentazioni nei contesti in cui è più facile per lo studente muoversi o trovarsi: la comunicazione nei *social* e i dibattiti televisivi. Improbabile trovare in questi contesti buoni esempi di argomentazioni tese a costruire, comunicare e condividere conoscenza.

### 3. Le attività argomentative e le indicazioni curricolari

La necessità di investire su un'educazione all'argomentazione è esplicita anche nelle indicazioni curricolari nazionali di ogni grado scolare: basta leggerle e si troveranno diversi punti in cui si evidenzia l'importanza dell'avvio al pensiero critico, della scelta dell'argomentazione come modalità per sostenere le proprie idee.
Per evitare di citare molti passi probabilmente noti alla maggior parte dei lettori, li sintetizzo riportando la definizione che PISA (Programme for International Student Assessment) dà di competenza globale:
"la capacità di affrontare criticamente temi locali, globali e multiculturali da diverse prospettive, per comprendere come le differenze influenzino le percezioni, le valutazioni e le idee su sé stessi e gli altri e impegnarsi nel favorire interazioni aperte, efficaci ed efficienti con persone di culture diverse e di agire per il benessere comune e lo sviluppo sostenibile".

Non trovate che possa costituire una mirabile sintesi degli obiettivi che dovrebbe avere un progetto di insegnamento-apprendimento adeguato alle esigenze di una società globale, multiculturale, gravata da problemi di enorme difficoltà e complessità, che necessita di una cittadinanza informata, competente, consapevole e critica?
Certo, si tratta di un obiettivo molto ambizioso, forse concretamente non raggiungibile: eppure è importante che sia lì a indicare la direzione verso cui muoversi. Anche gli articoli della Costituzione indicano obiettivi ambiziosi, non raggiunti dopo circa settant'anni. Pietro Calamandrei, nel 1955, nel discorso sulla Costituzione a Milano, riconosceva che i principi costituzionali sono spesso non

realizzati, ma proprio per questo sono vivi: indicano un programma, un impegno, un lavoro da compiere; sono come un grido di dolore che le generazioni passate lasciano a quelle future affinché il programma di realizzarli prosegua e non si interrompa. Non è quindi la lontananza tra quello che gli obiettivi indicano e la situazione reale da cui si parte che deve spaventare; semmai è da temere l'assenza di obiettivi ambiziosi.

Spero che queste poche considerazioni sull'importanza delle attività argomentative nelle indicazioni curricolari e sulla necessità di porsi obiettivi ambiziosi, ancorché fondamentali per la formazione di persone che desiderino partecipare attivamente alla vita sociale, convincano che si debba investire tempo e risorse nelle attività argomentative, di cui i dibattiti sono un ottimo esempio.
Se si realizzano attività attente all'argomentazione non si può sbagliare, così come non si può sbagliare quando si lancia un ciottolo in acqua: si fa centro sempre, perché è il sasso stesso che, cadendo, forma il bersaglio.[3]

## 4. Il dibattito realizzato in classe

In questo paragrafo descrivo le caratteristiche principali di un dibattito che è stato realizzato nell'a.s. 2020-2021 in una mia classe di quarta liceo scientifico: accennerò alle sue finalità, al tema e al perché è stato scelto questo tema, alla struttura del dibattito e quindi alle sue regole e alla sua organizzazione, alle modalità di valutazione. Lo scopo è quello di esplicitare e precisare le principali differenze e analogie con le finalità, la struttura e le regole dei *debate*, già accennate nell'introduzione.

Per una descrizione più articolata e approfondita delle attività che hanno preceduto il dibattito vero e proprio, in particolare degli argomenti di carattere specificamente matematico che sono stati trattati, rimando a [Paola, 2022].
Come emerge già dal quadro teorico sopra esposto, la finalità di un dibattito è quella di favorire la costruzione di competenze argomentative, la costruzione di conoscenze sul tema del dibattito e la condivisione delle stesse nella classe, in modo tale che, grazie ai diversi contributi di chi ha partecipato, ciascuno studente (ma anche lo stesso insegnante) possa affermare, alla fine dell'attività, con consapevolezza e convinzione di essere significativamente più preparato a discutere sul tema oggetto del dibattito. Questa è una prima significativa differenza con il *debate*, in cui la finalità principale è quella di prevalere sui contendenti e la crescita di conoscenza è solo una conseguenza che, come penso di riuscire a dimostrare nel prossimo paragrafo, non necessariamente avviene.

Il tema del dibattito è stato il problema delle disuguaglianze economiche in una società: come scrive [Piketty, 2014, p.13], "la questione della distribuzione delle ricchezze è troppo importante per essere lasciata ai soli economisti, sociologi, storici e filosofi. È una questione che interessa tutti, ed è meglio che sia così. La realtà concreta e fisica della disuguaglianza è ben visibile a tutti coloro che la vivono, e suscita naturalmente giudizi politici netti e contraddittori".

Le parole di Piketty suggeriscono che il tema sia particolarmente adatto a formare competenze di cittadinanza, in quanto consente agli studenti di confrontarsi, migliorare le proprie competenze argomentative e approfondire conoscenze specifiche su un argomento che interessa qualunque persona che desideri partecipare attivamente, in modo informato, consapevole e critico alla vita pubblica. Come detto in [Paola, 2022] la fase preparatoria del dibattito e lo stesso dibattito hanno consentito di introdurre, precisare e consolidare conoscenze e competenze matematiche specifiche. Desidero però puntualizzare che la prospettiva con cui ho progettato questa attività non è quella di utilizzare contesti di economia per realizzare attività matematiche, ma quella, completamente

[3] L'immagine è tratta dalla canzone *Sala da concerto*, dal disco *Il grido della fata* di Max Manfredi " … tu prova e vedrai a buttare il ciottolo in acqua, e dovunque lo butti non c'è da sbagliarsi, vedrai che si fa centro sempre."

capovolta, di utilizzare un po' di matematica per comprendere situazioni e dati economici di importanza fondamentale nel dibattito pubblico.

Quanto appena detto dovrebbe chiarie che i principali motivi della scelta del tema del dibattito sono più legati all'esortazione espressa nelle parole di Piketty sopra citate che non alla possibilità di introdurre e utilizzare conoscenze matematiche specifiche.

Passiamo ora all'organizzazione dell'attività, alla struttura del dibattito e alle sue regole.
Il dibattito è stato preceduto da una attività preparatoria, avviata all'inizio dell'anno scolastico e conclusasi alla fine di novembre 2020. Quest'attività, per la cui descrizione rimando a [Paola, 2022], ha avuto l'obiettivo di far comprendere agli studenti che il problema della distribuzione delle ricchezze nel mondo si può studiare da diverse prospettive e che le questioni che ci si pongono e le risposte che si possono dare dipendono fortemente da quelle prospettive.
Successivamente gli studenti hanno avuto circa tre mesi e mezzo per approfondire il problema individualmente, attraverso letture personali o consigliate da altri docenti del consiglio di classe e anche grazie al webinar "Disuguaglianze" del professor Mario Pianta della Scuola Normale di Pisa a cui la classe ha assistito il 13 gennaio 2021.
Verso la metà di marzo ho suddiviso la classe in cinque gruppi, ciascuno dei quali aveva un ruolo specifico da svolgere durante il dibattito:

- il primo aveva il compito di sostenere la seguente tesi: "Le disuguaglianze sociali ed economiche sono andate progressivamente aumentando nel mondo occidentale dalla fine del secolo XIX a oggi, fino a raggiungere valori difficilmente accettabili, che rischiano di creare malessere sociale e instabilità politica";

- il secondo gruppo aveva il compito di sostenere la tesi contrapposta (antitesi): "Le disuguaglianze sociali ed economiche si sono notevolmente ridotte, nel mondo occidentale, dalla fine del secolo XIX a oggi e, nonostante permangano motivi di motivata insoddisfazione per le classi meno agiate, si può dire che il reddito medio pro-capite sia significativamente aumentato, riducendo le situazioni di estrema povertà";

- il terzo gruppo era quello dei *giornalisti*, che, ben informati sull'argomento, devono porre domande che mettano in difficoltà sia chi sostiene la tesi sia chi sostiene l'antitesi, allo scopo di aiutare a fare emergere punti di forza e di criticità in entrambe le posizioni e quindi di favorire la riflessione e la condivisione di conoscenze sul tema oggetto del dibattito;

- il quarto gruppo aveva il compito di proporre una sintesi che contenesse i punti di forza emersi nelle esposizioni della tesi e dell'antitesi e che offrisse un'immagine affidabile e condivisa del *sapere* raggiunto dalla classe, sul tema oggetto del dibattito, al termine di questa complessa attività;

- il quinto gruppo era quello del *pubblico*: ogni studente di questo gruppo aveva il compito di dare una valutazione delle argomentazioni prodotte per sostenere la tesi e di quelle per sostenere l'antitesi secondo i tre parametri della razionalità individuati da Habermas: teleologico, epistemico, comunicativo.

Nella struttura del dibattito, insieme alle somiglianze, emergono anche alcune differenze rispetto al *debate*. Innanzitutto, nel *debate*, sono previste due esposizioni contrapposte che si sfidano e una giuria che valuta quella che risulta più convincente e, quindi, *vincente*. Nel dibattito qui descritto, invece, le due esposizioni contrapposte, quella a sostegno della tesi e quella a sostegno dell'antitesi, sono seguite da una sintesi che, in un processo dialettico ha il compito di provare a risolvere, anche solo parzialmente, la contrapposizione, individuando i punti di forza risultanti dalle esposizioni della tesi e dell'antitesi. Naturalmente il risultato della sintesi difficilmente riuscirà a mediare ogni contrapposizione: più probabile, invece, che porti a due (o più) ulteriori contrapposizioni, ma più vicine rispetto a quelle originarie. Il processo di mediazione delle contrapposizioni potrebbe così continuare, anche senza fine, ma con l'auspicio di avvicinare ulteriormente le diverse posizioni o, almeno, di chiarirne sempre più i punti di contrapposizione e i motivi che eventualmente li rendono insuperabili. Questo processo dialettico è al cuore di una cultura dell'argomentazione e rischia di essere eccessivamente trascurato nel *debate*: difficilmente gli studenti possono coglierlo e sperimentarne l'efficacia in una semplice gara tra due posizioni contrapposte.

Un'altra significativa differenza riguarda la valutazione del *debate* e quella del dibattito. Nel *debate* la valutazione avviene per opera di una giuria che stabilisce, in base a determinati criteri, l'esposizione più convincente. Nel dibattito la valutazione, sia quella degli studenti che svolgono il ruolo del *pubblico*, sia dell'insegnante, non stabilisce alcun vincitore: anche quando alcuni studenti del pubblico decidono di indicare chi li ha maggiormente convinti, sono consapevoli che questo giudizio non fa parte della valutazione. La valutazione, fondata sui tre criteri di razionalità precisati da Habermas, ha come obiettivo quello di individuare i punti delle due esposizioni (quella della tesi e quella dell'antitesi) che maggiormente hanno consentito di avanzare passi significativi verso una maggiore conoscenza e comprensione dell'oggetto del dibattito (tenendo anche conto di quanto emerso nella sintesi e delle reazioni alle domande dei giornalisti). Non si decreta alcun vincitore: inoltre le valutazioni del pubblico sono individuali; gli studenti del pubblico non concordano un'unica valutazione. È l'insegnante che, al termine dell'attività, tenendo conto del contributo di tutti i diversi attori del dibattito, discute con gli studenti le proprie valutazioni dell'attività, che comportano giudizi diversi studente per studente, ma non decretano alcun vincitore. Nel dibattito non ci sono vincitori o sconfitti: semmai è l'intera attività che vince, quando si può dire con elevata probabilità che ci sia stata una significativa evoluzione del sapere della classe sull'argomento, o che, invece, viene sconfitta, quando su questa evoluzione si addensano nubi e dubbi.

Naturalmente l'aspetto ludico del *debate*, dovuto in gran parte alla sfida, alle tecniche per aggiudicarsi il favore della giuria viene fortemente ridimensionato o è del tutto assente nel dibattito.

Veniamo infine a una regola del dibattito che, nuovamente, differisce molto da quella del *debate* e che riguarda i tempi. Nel *debate* sono fortemente contingentati. Ricordo la regola del *debate* dichiarata in [Cinganotto & al., 2019]: l'alternanza dell'esposizione delle due posizioni contrapposte secondo regole e tempi ben precisi.
Il dibattito sulle disuguaglianze aveva le seguenti regole relativamente ai tempi:

- l'esposizione della tesi dovrà durare circa 25 minuti; in seguito, il gruppo che sostiene l'antitesi, avrà la possibilità di porre non più di due rilievi critici all'esposizione della tesi e il gruppo che ha esposto la tesi avrà cinque minuti di tempo per rispondere ai rilievi critici;
- struttura e tempi analoghi per l'esposizione dell'antitesi, i rilievi critici e le risposte;
- successivamente il pubblico avrà circa quindici minuti per chiedere eventuali chiarimenti puntuali relativi alle esposizioni;
- successivamente ciascun giornalista potrà proporre al massimo due domande al gruppo che ha esposto la tesi e due domande al gruppo che ha esposto l'antitesi, per un tempo di circa un'ora per la posizione delle domande e per le risposte;
- quindi, una settimana circa dopo queste prime fasi, verrà esposta la sintesi in un tempo di 25 minuti circa a cui seguirà una discussione collettiva finale di circa 30 minuti.

Da un breve calcolo si può vedere che il tempo previsto per il dibattito era, in totale, di circa tre ore.

Le regole di contingentazione dei tempi avevano però, a livello superiore, la seguente metaregola:

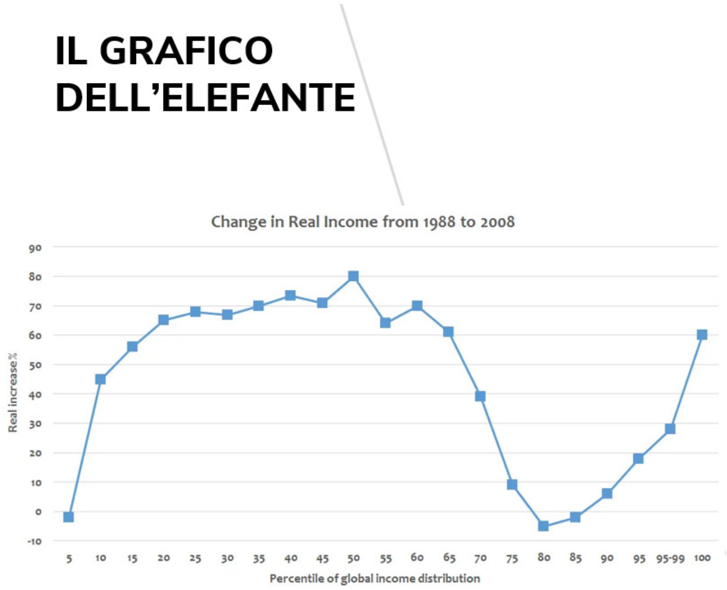
- se la discussione risultasse interessante e cioè se le domande e le risposte aggiungessero informazioni e conoscenze sull'oggetto del dibattito, favorendo quindi una significativa evoluzione del sapere sull'argomento, allora i tempi potrebbero essere dilatati anche notevolmente.

Come si può notare, la metaregola sconvolge quella condizione del *debate* dei tempi ben precisi: i tempi possono essere dilatati e l'unico limite sono le ore disponibili dagli inizi di maggio al termine della scuola. La condizione per poter applicare la metaregola, però, è che la discussione aggiunga nuovo sapere e sia partecipata, altrimenti non potrebbe favorire l'evoluzione del sapere della classe sull'argomento.

Ebbene, le domande dei giornalisti e anche del pubblico, che ha svolto un ruolo molto più attivo durante la discussione in classe di quello che era stato previsto, il contraddittorio tra il gruppo della tesi e quello dell'antitesi sono stati talmente ricchi di dati e posizioni, presentati ed espresse con sorprendente maturità e profondità, da dilatare il tempo del dibattito dalle tre ore previste a circa venti ore, tanto è vero che l'attività si è svolta durante tutto il mese di maggio.

**5. Descrizione di alcuni momenti del dibattito**

In questo paragrafo prendo in considerazione alcuni particolari momenti del dibattito, che non ho analizzato in [Paola, 2022], allo scopo di cercare di portare argomenti a sostegno della tesi che le rigide regole del *debate*, coerenti con lo scopo di valutare la posizione espressa in modo più convincente e quindi decretare un vincitore, possano inibire la crescita del sapere in classe sul tema oggetto del dibattito e quindi non essere coerenti con l'obiettivo di un'azione didattica volta alla costruzione, al consolidamento e alla condivisione di conoscenze e competenze.
Poco dopo un breve discorso introduttivo, allo scopo di sostenere quella che sopra è stata denominata come *antitesi*, Lorenzo presenta la seguente diapositiva:




Si tratta di un noto grafico proposto nel 2013 da Lakner e Milanovic, che spesso viene utilizzato come prova di una forte crescita della ricchezza tra le classi più elevate e che, quindi, sembra portare evidenze contrarie a quanto il gruppo di Lorenzo ha il compito di sostenere. Lo studente mette subito in chiaro, fin dall'inizio, che questo grafico nasconde alcune insidie e che, se opportunamente corretto e interpretato, consente di corroborare l'antitesi. L'argomentazione di Lorenzo è strategicamente interessante: si preoccupa di smontare una delle possibili evidenze che in genere si portano a sostegno della tesi contrapposta. Lo studente però ritiene, a mio avviso molto opportunamente, che innanzitutto sia necessario che i partecipanti al dibattito siano messi in grado di leggere e comprendere il grafico e di darne l'interpretazione più immediata. Per conseguire questo obiettivo sceglie uno stile completamente diverso da quello della presentazione frontale e inizia a porre domande alla classe su come sia possibile interpretare il grafico, chiedendo che cosa viene indicato su due assi e poi che informazioni può dare il particolare andamento che richiama proprio il profilo di un elefante.

La classe viene quindi portata gradualmente a comprendere che il grafico indica, per ogni cinque percentili di reddito (asse delle ascisse) della popolazione mondiale, l'aumento percentuale del reddito che si è registrato dal 1998 al 2008. Appare così chiaro che i primi cinque percentili, dove si colloca la popolazione mondiale più povera non hanno avuto alcun incremento di reddito nei venti anni considerati; inoltre si individua un'altra fascia, quella tra il settantacinquesimo e il novantesimo percentile in cui registra una crescita di reddito non superiore al 10% e, anzi, per alcuni percentili addirittura una diminuzione di reddito; infine si individuano altre due fasce, quella tra il decimo e il settantesimo percentile e quella tra il novantacinquesimo e l'ultimo percentile che hanno avuto un incremento percentuale di reddito non inferiore al 40% (se si esclude il novantacinquesimo percentile che ha avuto un incremento del 20%), con una punta dell'80% per il cinquantesimo percentile.

Lorenzo aggiunge ancora che il grafico è un tentativo di misurare la disuguaglianza globale dei redditi, come se il mondo fosse un unico Paese. Apre quindi una parentesi sull'indice di Gini (in base al quale la disuguaglianza dei redditi nel ventennio 1988 – 2008 non sarebbe sostanzialmente cambiata) e sui punti di forza del grafico dell'elefante che, molto meglio dell'indice di Gini, consente di esplicitare l'andamento dei redditi ogni cinque percentili.

La classe è ora pronta a condividere un'interpretazione che sembra emergere dalla lettura del grafico e che è stata effettivamente proposta: i paesi più poveri non hanno avuto sostanzialmente variazioni di reddito e quindi la disuguaglianza economica tra i Paesi più poveri e quelli più ricchi è aumentata. Sembra quindi che la conclusione a cui si è giunti contraddica ciò che il gruppo di Lorenzo vuole sostenere e cioè che le disuguaglianze economiche si sono ridotte. Lorenzo invita la classe a proporre critiche a questa lettura del grafico e Tommaso interviene osservando che, a suo avviso, se si vogliono avere informazioni sulla equità o non equità della distribuzione dei redditi, non è corretto considerare il mondo come un unico Paese. Non è esattamente la critica a cui Lorenzo sta pensando, ma l'intervento di Tommaso coinvolge molti studenti della classe e inizia una discussione che porta a considerare quello che è avvenuto in diversi Paesi del mondo, con contributi anche ricchi di dati e riferimenti (il che testimonia da parte degli studenti un impegno nel lavoro di ricerca con cui hanno preparato il dibattito).

Infine, Lorenzo fa osservare che l'impressione, che si ha a una prima lettura del grafico, e cioè che i Paesi più poveri sono rimasti poveri, deve essere valutata con maggiore attenzione. Infatti, dal 1988 al 2008, la composizione di alcuni percentili è notevolmente cambiata. Per esempio, una significativa componente della popolazione cinese è passata, nel corso del ventennio, da bassi livelli di reddito (bassi percentili) ad alti livelli di reddito (anche appartenenti al nono decile), mentre nel 1988 i percentili relativi agli alti livelli di reddito erano composti quasi esclusivamente dalla classe media occidentale[4]. Inoltre, è anche necessario tenere conto che il campione del 2008 non era lo stesso campione del 1988, in quanto i dati di alcuni Paesi erano disponibili solo in uno dei due periodi.[5] Un

[4] Si confronti anche il contributo di Pietro Ichino, *L'elefante di Milanovic (a proposito di vincenti e perdenti della globalizzazione)*, https://www.pietroichino.it/?p=43751 che Lorenzo ha citato nei riferimenti.

[5] Si veda anche *L'elefante della disuguaglianza globale*, https://eticaeconomia.it/lelefante-della-disuguaglianza-globale/.

grafico realizzato con un campione consistente fornisce un'informazione leggermente differente, ma soprattutto, il grafico del periodo 2008 – 2013[6] fornisce un'informazione profondamente differente: l'elefante sembra aver abbassato la proboscide e alzato la schiena e il mondo sembra trovare un certo equilibrio per quel che riguarda la distribuzione delle ricchezze.

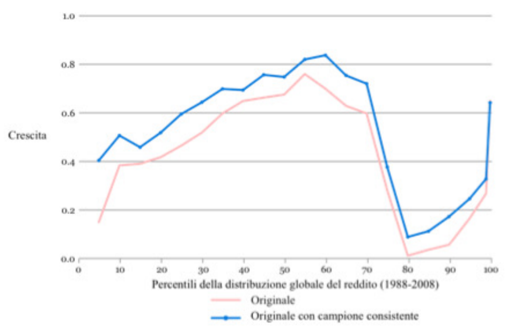




Grafico 2008 – 2013

In un'attività di *debate*, in cui i tempi sono necessariamente e fortemente contingentati, Lorenzo non avrebbe avuto la possibilità di scegliere uno stile di presentazione che ha dilatato enormemente i tempi (la sua esposizione è durata circa due ore, rispetto ai circa sette minuti che aveva a disposizione), ma che ha coinvolto la classe in un dibattito su un punto solo apparentemente specifico (la lettura del grafico dell'elefante): in realtà gli studenti che hanno preparato la sintesi hanno approfondito notevolmente il tema dell'importanza della scelta della distribuzione geografica e del periodo di tempo preso in considerazione per trarre conclusioni sull'evoluzione dell'equità della distribuzione delle ricchezze. Inoltre, la discussione sulla lettura dei dati del grafico dell'elefante è stato un chiaro ed esplicito esempio di quanta attenzione si debba porre nel trarre conclusioni da letture affrettate o superficiali dei dati.

Il gruppo di Lorenzo, come suggerisce la diapositiva che riassume i punti fondamentali dell'esposizione, riportata nell'immagine seguente, ha inoltre allargato notevolmente, rispetto a quanto necessario, il campo dei temi da affrontare per sostenere la riduzione delle disuguaglianze economiche: anche in questo caso ho applicato la metaregola e ho permesso che i tempi si dilatassero, perché l'esposizione ha contribuito ad aumentare la conoscenza della classe sul tema.


[6] Si veda https://osf.io/preprints/socarxiv/du5g6.

Non ho qui lo spazio per commentare altri momenti del dibattito. Mi limito a dire che anche il gruppo che ha sostenuto la tesi contrapposta e il gruppo della sintesi hanno richiesto e ottenuto tempi molto maggiori rispetto a quelli previsti, perché le discussioni che i loro interventi hanno sollevato, sono state particolarmente significative per conseguire l’obiettivo di far crescere il sapere in classe sul problema della equidistribuzione delle ricchezze. Per esempio, il gruppo che sosteneva la tesi contrapposta ha presentato i concetti di equità orizzontale e verticale di un sistema di tassazione dei redditi proponendo e stimolando interessanti e non banali riflessioni sul sistema di tassazione progressivo vigente in Italia e sull’opportunità o meno di modificarlo, tema che è di estrema attualità oggi. Proprio quella discussione, forse, potrà fornire a quegli studenti, che adesso hanno terminato il ciclo di studi secondari e che sono ormai maggiorenni e quindi hanno tutti i diritti e i doveri di una cittadinanza attiva, elementi per considerare con maggiore consapevolezza gli effetti e gli eventuali punti di criticità e di forza delle proposte di modifica del nostro sistema di tassazione.
Rimando a [Paola, 2022] per le principali conclusioni che sono state proposte dal gruppo che ha esposto la sintesi.

## 6. La valutazione del dibattito

Attività come quella presentata difficilmente consentono di assegnare valutazioni oggettive, semmai sia davvero possibile parlare di oggettività nella valutazione. Come ho già detto nella parte relativa al quadro teorico, la scelta di utilizzare come indicatori i criteri di razionalità di Habermas dovrebbe aiutare l’insegnante a offrire agli studenti informazioni significative per migliorare le proprie competenze argomentative e quindi a realizzare quello che ritengo sia la funzione fondamentale della valutazione formativa: promuovere competenze. Infatti, i criteri suggeriscono di porsi e rispondere a domande come le seguenti:

- quali sono le modalità con cui gli studenti hanno sostenuto le proprie tesi?
- Hanno dimostrato attenzione alle considerazioni dei compagni?
- Sono intervenuti sistematicamente e in modo pertinente nelle discussioni?
- Dimostrano disponibilità a cambiare opinione di fronte a critiche puntuali e pertinenti o continuano a sostenere le proprie opinioni senza portare nuovi dati e conoscenze a supporto?
- Sono consapevoli dell’obiettivo che devono perseguire?
- Utilizzano le conoscenze apprese e i dati raccolti in coerenza con l’obiettivo che si sono prefissati?
- Dimostrano un impegno a verificare l’efficacia e l’efficienza delle proprie affermazioni, tenendo anche conto del contesto in cui vengono prodotte?
- Dimostrano impegno a verificare la plausibilità, l’affidabilità e la correttezza delle informazioni e dei dati utilizzati?
- Curano la parte espositiva e comunicativa con l’obiettivo di favorire la comprensione e la condivisione da parte delle compagne e dei compagni?

Come si può notare, si tratta di informazioni che riguardano non solo la sfera cognitiva, ma anche quelle metacognitiva e non cognitiva: proprio per questo consentono di esprimere valutazioni più significative e accurate di quelle consentite dalle verifiche tradizionali. Inoltre, la precisazione dei criteri consente di ridurre notevolmente l’apparenza di arbitrarietà che talvolta assumono le valutazioni di attività molto complesse: si tratta indubbiamente di valutazioni fortemente soggettive, ma non arbitrarie e, proprio perché soggettive, assai più ricche e informative di quelle che cercano di tendere verso l’oggettività. Naturalmente non possono avere la pretesa classificare livelli di apprendimento che possano poi consentire comparazioni tra studenti di altri contesti: si tratta di valutazioni che hanno lo scopo di promuovere apprendimenti, non di classificarli.

Come scrive Paolo Boero nel documento già citato *Educare alla razionalità*, è necessario dare precisione ai criteri di valutazione degli studenti, soprattutto, ma non solo, nella prospettiva di una valutazione formativa, sia che si tratti di aspetti tecnici specifici, sia di aspetti di portata più ampia come stabilire la verità di affermazioni in base alle conoscenze disponibili. La precisazione dei criteri di valutazione consentita dalla prospettiva di Habermas sulla razionalità consente anche di rendere consapevole lo studente dei propri punti di forza e di criticità relativamente alle componenti teleologica, a quella epistemica e a quella comunicativa, quindi relativamente alla propria capacità di agire, conoscere e comunicare. Nonostante le tre componenti siano profondamente intrecciate, informazioni specifiche sui punti di forza e di criticità rilevati su ciascuna di esse consentono allo studente di avere indicazioni su come migliorare e consolidare le proprie competenze argomentative e su come approfondire il sapere sul tema oggetto del dibattito. Ciò aiuta anche a sviluppare l'autonomia dello studente e quindi favorisce il passaggio dalla valutazione dell'insegnante all'autovalutazione da parte dello studente rispetto alle tre dimensioni del conoscere, agire e comunicare, orientando l'impegno dello studente a superare i propri limiti e potenziando le proprie capacità di superarli.[7]

Nelle valutazioni che ho assegnato agli studenti ho privilegiato maggiormente la componente teleologica e quella epistemica, rispetto a quella comunicativa: è stata una mia scelta che evidenzia un'altra forte differenza con le attività di *debate*, dove invece si assegna importanza fondamentale alla componente comunicativa.

## 7. Conclusioni

Un'obiezione che può essere portata all'esperienza che ho descritto è l'aver scelto un tema così complesso da affrontare nel dibattito: è chiaro che questa complessità è una delle cause più importanti dello sforamento dei tempi previsti e che ciò comporta la difficoltà di realizzare esperienze di questo tipo in discipline che abbiano un monte orario meno importante di quello che avevo a disposizione nel corso di matematica e fisica di un liceo scientifico. Inoltre, rendono improbabile la realizzazione di più esperienze di questo tipo durante un anno scolastico, rischiando di rendere marginale e non sistematica l'attenzione alla costruzione di competenze argomentative.
Si tratta di obiezioni molto importanti, da prendere in seria considerazione.

Ritengo, però, che la significatività di un'attività di dibattito dipenda in modo considerevole dalla scelta del tema oggetto di dibattito, che deve essere un tema di importanza fondamentale per la formazione dello studente. Inevitabilmente, i temi più significativi per la loro attualità (disuguaglianze nel mondo, cambiamenti climatici, perdita del potere di acquisto dei salari, andamento della disoccupazione, globalizzazione, uso delle tecnologie, …) sono complessi e comportano il rischio dell'uso della metaregola che può portare all'esplosione dei tempi di svolgimento del dibattito. Le conseguenze, esiziali in un corso disciplinare che dispone di meno di quattro ore settimanali, possono però essere mitigate dalla disponibilità da parte di altre discipline a fornire supporto: se il dibattito viene preparato e realizzato all'interno di un consiglio di classe, con il contributo di diverse discipline che mettono a disposizione un tempo proporzionale al proprio orario settimanale, è possibile mantenere l'importante condizione di scegliere argomenti oggetto di dibattito complessi e, pertanto, significativi, senza pregiudicare la possibilità di realizzare i percorsi disciplinari pianificati.

[7] Approfondimenti molto significativi rispetto a questi aspetti si trovano nel documento di Paolo Boero *Educare alla razionalità*.

Alla seconda obiezione, e cioè al rischio di rendere l’attività di dibattito un unicum nel corso dell’anno scolastico decretandone implicitamente la marginalità e, quindi, rendendola poco adatta a conseguire competenze di carattere argomentativo, rispondo che se un’attività di dibattito come quella proposta non può effettivamente essere ripetuta nel corso di un anno scolastico, attività volte alla formazione e al consolidamento delle competenze argomentative vanno svolte sistematicamente e frequentemente durante il percorso scolastico. Questo deve accadere in ambito specificamente disciplinare, sia con attività puntuali di lavori individuali o in piccoli gruppi che si realizzano nell’arco di una o due ore di lezione, sia con progetti più articolati, che richiedono un numero maggiore di ore, ma che consentono di introdurre e sviluppare argomenti disciplinari di grande importanza e, al tempo stesso, delicati. Un esempio di questo tipo di attività è descritto in [Paola, 2019] e, una sua fase, in [Paola & Saccoletto, 2022].

Per concludere, Dibattito o *Debate*? Questo è il problema …
La questione potrebbe essere essa stessa oggetto di dibattito e, magari, non di *debate*, ma, a parte i giochi di parole, sarebbe interessante affiancare a questo contributo un altro che assuma una diversa prospettiva e, da quella prospettiva, evidenzi eventuali limiti del dibattito e potenzialità del *debate*.

**Bibliografia**

Cinganotto, L., Mosa, E., Panzavolta, S. & al. (a cura di). (2019). *Avanguardie educative. Linee guida per l’implementazione dell’idea “Debate (Argomentare e dibattere)*, versione 2.0. Indire, Firenze, disponibile all’indirizzo web https://pheegaro.indire.it/uploads/attachments/3146.pdf .

Habermas J. (2001). *Verità e giustificazione*. Bari, Laterza.
Mercier, H. & Sperber, D. (2017). *The Enigma of Reason*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.

Paola, D. (2019). Un'esperienza di avvio al pensiero probabilistico nella prospettiva di educare alla razionalità, in *Educare alla razionalità - Tra Logica e Didattica della Matematica* - (a cura di Morselli, F., Rosolini, G., Toffalori, C.) Atti del convegno di Sestri Levante 9-11 giugno 2016 in ricordo di Paolo Gentilini, Edizioni dell'Unione Matematica Italiana.

Paola, D. (2022). Matematica dalla realtà e per la realtà. Analisi di dati scientifici ed economici nella scuola secondaria per descrivere, capire e fare scelte. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 45B, 1, 25 – 52.

Paola, D. & Saccoletto, M. (2022) Il problema della partizione della posta in classe: il confronto tra le soluzioni di Cardano e di Fermat, in *Didattica della Matematica come attività di ricerca in aula* (a cura di Bruno D'Amore) Atti degli Incontri con la matematica n. 36, Pitagora, Bologna, p.205.

Perelman, C. & Olbrechts-Tyteca, L. (2013). *Trattato dell’argomentazione. La nuova retorica.* (*Trad. it. di Traité de l’argumentation. La nouvelle rhétorique*, 1958), Einaudi, Torino.

Piketty, T. (2014). *Il capitale nel XXI secolo*, Bompiani, Milano.

Thurston, P. W. (1994). On Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30, n. 2, p. 161 – 177, disponibile alla pagina web https://www.math.toronto.edu/mccann/199/thurston.pdf .

## Società

Matematica e società.

# Quando l'insegnamento della Matematica si scopre violento

**Adriano Demattè**
Centro Ricerche Didattiche "Ugo Morin", Pieve del Grappa (TV)

adrdematte@gmail.com

**Sommario.** Il ruolo di rilievo che la ricerca educativa assegna ai temi etici porta a individuare nella classe di matematica situazioni di violenza che si determinano in occasioni spesso non riconosciute e sulle quali, perciò, non si interviene. In questo articolo desidero condividere alcune riflessioni ispirate dal pensiero del filosofo franco-lituano Emmanuel Levinas (1906–1995), in particolare dal suo *Totalità e Infinito - Saggio sull'Esteriorità*. La violenza si trova nel non promuovere la comprensione degli studenti, in un uso distorto della retorica, nell'interrompere una relazione etica. Vengono esaminate alcune conseguenze dal punto di vista educativo, fino a considerare come, di conseguenza, lo stesso studente adotti atteggiamenti violenti.

**Abstract.** The important role that educational research assigns to ethical issues leads to focusing situations of violence in the mathematics classroom which arise on occasions that are often not recognized and on which, therefore, no action is taken. In this article I would like to share some reflections inspired by the thought of the Franco-Lithuanian philosopher Emmanuel Levinas (1906–1995), in particular by his *Totality and Infinity - Essay on Exteriority*. Violence is found in not promoting student understanding, in a distorted use of rhetoric, in interrupting an ethical relation. Some consequences from an educational point of view are examined, up to considering how, as a consequence, that the same student adopts violent attitudes.

## 1. Introduzione

La ricerca in educazione matematica sta dedicando ampie riflessioni al tema dell'etica, da vari punti di vista. Ernest (2018) mette a fuoco due fondamentali interrogativi: "In quali termini l'etica riguarda l'insegnante di matematica? Come si identifica un insegnamento della matematica etico?" Egli considera il ruolo professionale degli insegnanti e il problema della loro formazione. Boylan (2016) introduce "quattro importanti dimensioni: la relazione con gli altri, i rapporti sociali e culturali, la relazione ecologica e culturale e la relazione con sé". Sottolinea che "chi si occupa di educazione matematica opera scelte etiche che sono necessariamente ambigue e complesse". Radford (2021) parla dell'insegnamento e apprendimento della matematica come di un evento etico, nella classe che costituisce un luogo per la costruzione della conoscenza attraverso la crescita dell'intersoggettività. Radford y Lasprilla Herrera (2020) analizzano specifiche situazioni per mostrare come la dimensione etica permei l'insegnamento/apprendimento della matematica. Guillemette (2018), Demattè & Guillemette (2019), Guillemette & Demattè (2022) dirigono la loro attenzione verso l'individuo, identificandolo come "soggetto etico" con riferimento al pensiero di Emmanuel Levinas. Zembylas & Vrasidas (2005) – anticipando, evidentemente con altre motivazioni, quanto abbiamo vissuto in epoca Covid – senza fare riferimento ad un sistema etico precostituito operano un'analisi delle didattiche online come processi etici per creare l'Altro (si vedrà che la maiuscola in questo termine ha un significato particolare nel pensiero di Levinas). Arcavi and Isoda (2007), anche se non fanno esplicito riferimento alla dimensione etica, evidenziano l'importanza di imparare ad ascoltare l'altro e lo fanno con riferimento all'approccio a un testo matematico attraverso il quale è possibile adottare la prospettiva dell'altro. Sottolineano che ciò ha una funzione sia intellettiva che affettiva e la relazione con l'altro attraverso un testo scritto è la premessa per imparare meglio la matematica. La rivista online *Journal of Humanistic Mathematics* dedica una Special Issue a Ethics in Mathematics, con due editoriali e 11 articoli dei quali fa parte (Demattè, 2022a).

Il presente articolo intende recuperare da questi lavori soprattutto l'aspetto dell'interazione con l'Altro nella prospettiva di Emmanuel Levinas. Voglio considerare soprattutto l'alunno come soggetto che subisce violenza (ma si vedrà che c'è una violenza, se vogliamo dir così, "di ritorno"). Con questo però non intendo affermare che sia solo l'insegnante l'artefice iniziale delle situazioni violente all'interno della classe: c'è una terza parte – l'istituzione scolastica – che in particolari situazioni le favorisce. Desidero accantonare da subito l'aspetto eclatante della violenza fisica e delle percosse, che pure ha avuto un ruolo nella scuola, italiana e non solo. Desidero invece andare alla ricerca di situazioni meno evidenti, argomentando perché esse vadano qualificate come violente.

Cosa ci può essere di più violento verso uno studente che metterlo in situazioni che nei fatti ostacolano la sua crescita, che non gli consentono di far leva sulle sue conoscenze pregresse, che non gli permettono di esprimersi in modo autentico? E se poi avviene che ciò ha ripercussioni sulla sua capacità di dare significato a quanto fa in matematica - in termini più chiari, di comprendere - bloccando così la sua capacità di operare? In qualche caso, avviene che in effetti gli studenti sappiano svolgere un compito correttamente ma questo nonostante che, ad un'analisi attenta, non mostrino di saper riconoscere i legami logici fra le diverse parti di ciò che dicono o scrivono, di argomentare perché una proposizione è premessa di un'altra, di non saper produrre esempi e controesempi…

## 2. Violenza: quale significato?

Questo articolo è frutto delle riflessioni nei miei anni di insegnamento della matematica nella scuola secondaria e dell'approfondimento della filosofia di Levinas. Il legame fra questi due aspetti mi ha condotto alla convinzione che, in ultima analisi, il rapporto dei nostri studenti con la matematica si gioca nel loro rapporto con persone che ricoprono vari ruoli, non solo con gli insegnanti, quindi. Forse anche chi si occupa di insegnamento in altre discipline potrebbe fare considerazioni analoghe. La mia formazione mi orienta all'ambito della matematica e mi fa ritenere che le ben note problematiche legate alle difficoltà di rapporto con questa disciplina e quelle legate al suo apprendimento siano tali per cui il filosofo franco-lituano può offrire un punto di vista privilegiato, per un'analisi unitaria e integrata dei due aspetti. Ritengo che il suo pensiero mi abbia aiutato a dare la corretta priorità ai problemi che ho incontrato nell'insegnamento, a considerare che l'analisi degli aspetti cognitivi e delle scelte curricolari rischiano di essere esercizi vuoti se non vengono tenuti prioritariamente in considerazione gli aspetti relazionali con le persone.

Avviene addirittura che specifiche iniziative della scuola inducano gli studenti ad abbandonare la ricerca della comprensione per scegliere altre vie allo scopo di assolvere i compiti richiesti. Non intendo riferirmi a modi fraudolenti, piuttostoa strategie che gli studenti adottano durante il loro lavoro di preparazione ma che non sono finalizzate alla comprensione bensì allo svolgimento di compiti e al superamento delle prove di verifica. Si tratta di "scorciatoie" che, rispetto a un accurato lavoro di analisi, consentono un risparmio di tempo o che consentono di evitare il confronto con le proprie preconoscenze. Ritengo che ciò determini circostanze rilevanti dal punto di vista etico, non solo controproducenti per l'apprendimento. Forse, meglio, sono negative dal punto di vista etico e perciò anche dal punto di vista dell'apprendimento.

Stanti queste premesse, voglio ora proporre un passo tratto dall'opera di Levinas, in una mia traduzione, che mi ha aiutato a sviluppare anche il resto di questo articolo. Vorrei proporre al lettore di cercare una propria interpretazione dei singoli aspetti di quanto dice Levinas, riferendosi a considerazioni critiche sull'insegnamento/apprendimento della matematica.

"*La violenza non consiste tanto nell'ingiuriare o annichilire le persone, quanto nell'interrompere la loro continuità, facendo sostenere loro ruoli in cui non riconoscono più sé stesse, facendo loro tradire non solo i propri impegni ma la loro stessa sostanza, facendo loro produrre azioni che distruggeranno ogni possibilità di azione.*"

(Levinas, 1979, p. 21)

Propongo ora la mia interpretazione che, per punti, riprende anche quanto detto nell'Introduzione.

"La violenza non consiste tanto nell'ingiuriare o annichilire le persone…" – Non mi riferisco tanto a ingiurie, percosse, umiliazioni verso gli studenti allo scopo di reprimerli e sminuirli. Sottinteso: quello che propongo in questo articolo è un'analisi di altro tipo, rivolta a mettere in evidenza aspetti, per lo più negativi, in genere non riconosciuti nella loro valenza etica.

Dopo di che, voglio cambiare l'ordine di quello che dice Levinas.

"… facendo loro tradire non solo i propri impegni ma la loro stessa sostanza…" – Di fronte alla mancata comprensione, è facile attendersi che lo studente non sappia affrontare i compiti che gli vengono assegnati. Avviene però che lo studente non abbia compreso, ma comunque sappia svolgere un compito, una prova di verifica, correttamente, mostrandosi così non per quello che è: dunque, facciata ma non sostanza.

"… facendo sostenere loro ruoli in cui non riconoscono più sé stesse…" – Questa non può essere una situazione indolore, senza conseguenze, soprattutto nel caso in cui si ripeta. Mi chiedo quali atteggiamenti possa indurre. Forse vi si può collegare quello che mi ha detto uno studente: "Solo per te queste cose [la matematica scolastica, *n.d.r.*] hanno senso" (il tono confidenziale potrà insospettire qualche lettore: in effetti quello studente è mio figlio).

"… facendo loro produrre azioni che distruggeranno ogni possibilità di azione…" – Come potranno gli studenti far leva sulle prestazioni esibite in quei compiti, per svolgere altre azioni nel loro percorso di formazione matematica?

Come ultimo passo, quello che può essere una sintesi dei precedenti:

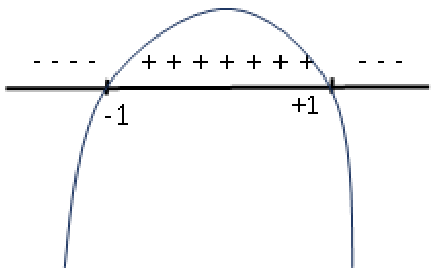
"… quanto nell'interrompere la loro continuità…" – Ritengo che possiamo essere d'accordo che la crescita degli studenti è un processo continuo (pensarlo come funzione continua ha valore metaforico, così come pensare al fatto che possa avere una derivata "decisamente" non costante…). I momenti di discontinuità che l'istituzione propone loro (passaggio da un ordine di scuola all'altro) in realtà sollevano problemi di recupero della continuità, che molti insegnanti certo hanno constatato.

## 3. Procedure da ripetere

Maria (pseudonimo) sotto la guida dell'insegnante sta svolgendo alla lavagna l'esercizio in cui è richiesto di risolvere la disequazione $1-x^2 > 0$.

Scrive anzitutto l'equazione associata $1-x^2 = 0$. Interviene l'insegnante: "*Io ho già trovato le soluzioni: come ho fatto?*" Maria: "*Ha risolto rapidamente* $x_{1,2}=$*...*", quindi procede effettivamente al calcolo

"$x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0-4 \cdot -1 \cdot 1}}{2 \cdot -1} = \frac{0 \pm \sqrt{0+4}}{-2} = \frac{0 \pm \sqrt{4}}{-2} = \frac{0 \pm 2}{-2}$" e quindi indica le due soluzioni -1 e +1. Traccia poi il diagramma.




"*$x^2$ è negativo [il coefficiente] e allora più all'interno e meno all'esterno. Guardo la disequazione e col '>' devo prendere i +. -1<x<1*".

L'insegnante: "*Se f(x)=1-$x^2$, senza fare calcoli, sai dire se f(2) è positivo o negativo?*"

Maria: "*Eh… metto al posto della x*".

Maria raggiunge lo scopo di scrivere la soluzione e quindi si dimostra in grado di affrontare una prova di verifica scritta. Avrà consapevolezza che i valori che trova con la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado verificano l'uguaglianza? Sarà in grado di utilizzare la procedura come parte di un esercizio in cui, ad esempio, sia chiesto di tracciare il grafico di una funzione, identificando preliminarmente le parti del piano cartesiano in cui il grafico si può trovare e quelle da cui è escluso? Se quello è lo stato delle sue conoscenze, possiamo ritenere che Maria non sarà in grado (diversamente da uno studente che sappia dare significato alle diverse fasi della procedura); potrà comunque avvenire che nel nuovo esercizio ricostruisca una nuova procedura, per lei una serie di nuovi atti formali la cui sostanza anche in questo caso potrebbe sfuggirle.

## 4. Linguaggio ed etica

Torniamo alla filosofia di Levinas e al riferimento all'etica. Una domanda decisamente vaga e solo apparentemente banale: quando - in quali circostanze - parliamo/usiamo il linguaggio? Risposta, che rinvia ad aspetti non banali: quando siamo, o ci sentiamo, interpellati da altre persone. Dunque, quando c'è un Altro che ci "convoca". Un "Altro" con la maiuscola, con cui la relazione sia costruttiva, "etica" nel senso che determina responsabilità nei suoi confronti (non voglio considerare il caso di conflitto, che meriterebbe un discorso a parte). "Responsabilità" significa anche disponibilità a ricevere un insegnamento: Levinas usa questa espressione in un senso molto ampio, che va oltre la relazione educativa. Per chi si occupa di insegnamento della matematica, si tratta del quadro di una situazione che consente apprendimento: grazie alla responsabilità dell'insegnante, grazie alla responsabilità dell'alunno. Specificherei: si tratta di una situazione imprescindibile perché avvenga l'apprendimento; si veda, ad esempio, (Demattè, 2022b).

Dunque, il linguaggio nasce, e ha ragione d'essere, dentro una relazione etica di responsabilità fra persone. Questo ritengo sia la premessa per considerare in tutta la sua negatività la situazione in cui l'insegnante chiede agli alunni di ripetere un messaggio verbale (una definizione, una regola, una procedura…) e non si assume come intento quello di far capire. Addirittura, Levinas dice che la relazione etica con l'Altro è conversazione. È bello pensare a quello che succede in classe, in una situazione del tutto consueta, in cui l'insegnante apre il libro e sceglie un esercizio a caso o accoglie la proposta di un esercizio "non venuto" e lo svolge assieme agli alunni. Questo lavoro comune, questa coincidenza d'intenti, fa capire l'aspetto essenziale del linguaggio, anche del linguaggio matematico: occasione di conversazione, per capire e farsi capire. La relazione educativa non si riduce però a un "Io-Tu" (o "Io-Voi") chiuso in sé stesso: è un "Io-Altro". "Altro" suggerisce diversità, novità, attesa... Se poi consideriamo quello che dice Levinas, vale a dire che c'è una Terza Parte che mi guarda attraverso gli occhi dell'Altro (Levinas, 1979, p. 213), allora capiamo che effettivamente ci si deve spingere oltre. O magari non serviva Levinas: potrebbero essere gli stessi studenti a farci capire che risolvere esercizi assieme all'insegnante perde motivazione se non si lavora in vista di qualcos'altro. In effetti, la Terza Parte che sta guardando è l'istituzione che, a breve, richiederà all'alunno di rendere conto della sua relazione con l'Altro (l'insegnante), ad esempio attraverso prove di accertamento.

Quando gli studenti svolgono un compito formalmente corretto ma che non esprime la loro conoscenza, essi patiscono la violenza legata all'uso distorto del linguaggio, visto che viene tradita la sua stessa essenza. Studiare esclusivamente in vista di prove di verifica, nelle quali venga premiata la mera ripetizione pedissequa di regole, evidentemente distoglie dalla disponibilità a ricevere un insegnamento. La violenza consiste nel distogliere lo studente dalla relazione etica con l'Altro su cui il linguaggio è basato o con la quale, secondo le parole di Levinas, addirittura si identifica.

Considero che la relazione degli studenti con l'insegnante che richiede quel tipo di compito, anche se è di obbedienza, non può essere definita "etica" poiché appare esclusivamente finalizzata ad ottenere i benefici che l'insegnante è in grado di erogare (voti/giudizi positivi) in quanto garante dell'istituzione. Da parte degli studenti è un modo per "strumentalizzare" l'insegnante ed esercitare, quindi, violenza nei suoi confronti. Si ha, se vogliamo dire così, una "violenza di ritorno".
Si determinano, quindi, situazioni di violenza reciproca le cui conseguenze dal punto di vista educativo ritengo siano del tutto negative, tanto più gravi quanto maggiore è la frequenza con cui quelle situazioni si ripetono. Una cosa è che insegnante e alunno stabiliscano una relazione di reciproca responsabilità finalizzata all'apprendimento in vista degli adempimenti richiesti dall'istituzione, altra cosa è bypassare questa relazione e avere individui che recitano una parte che non tiene conto della propria sostanza di esseri umani in ricerca della comprensione o che ha lo scopo di blandire.

### 5. Violenza in un'accezione non negativa

Immaginiamo una situazione nella quale l'insegnante pone per gli alunni l'obiettivo di imparare la seguente definizione tratta da uno dei libri di testo più diffusi in Italia:

"*La radice quadrata di un numero razionale positivo o nullo è quel numero, positivo o nullo, che, elevato al quadrato, dà come risultato il numero dato*".

Supponiamo che gli alunni sappiano dire o scrivere la definizione correttamente. Per assicurarsi che abbiano realmente compreso, l'insegnante può assegnare un lavoro supplementare, domande come: Cosa si intende con "numero nullo"? Qual è la radice quadrata di un numero nullo? Nella definizione vedi scritto due volte "positivo o nullo". Supponi di scegliere un numero razionale negativo come -4/9: riesci a trovare un numero che, elevato al quadrato, dà -4/9? Spiega allora per quale scopo nella definizione c'è scritto, la prima volta, "numero razionale positivo o nullo". "Positivo o nullo" è scritto anche poco dopo; spiega se, in base a questa definizione, possiamo scrivere $\sqrt{\frac{4}{9}}=-\frac{2}{3}$ (peraltro osservo che $(-2/3)^2=4/9$, come pure $(+2/3)^2=4/9$…), ecc. L'insegnante, quindi, richiede un nuovo compito, ulteriori azioni. Osserverà le reazioni degli studenti per accertare, anzitutto, se sono disposti a dedicarvisi nonostante il surplus di lavoro. Qualche studente potrà anticipare quelle domande, anche se non rendendole esplicite, durante il suo studio personale. Esse sono un modo per aumentare la padronanza dei concetti e per renderla visibile. Facendosi carico di queste domande, lo studente mostra di aderire alla proposta di un esperto della matematica, oppure di essere già in grado di porsi quelle domande mostrando la propria maturità di pensiero. Voglio notare come, in questa situazione, lo studente migliori il proprio approccio a un concetto teorico attraverso azioni specifiche.

Preliminarmente, lo studente deve accettare che l'insegnante indaghi la sua preparazione. Quelle richieste sono in sé violente, secondo una suggestione presente nel pensiero di Levinas, in particolare nella Prefazione di *Totalità e infinito*. Questa idea di violenza fa riferimento alla pretesa di contenere l'essere da parte del pensiero. Lo studente impegnato in matematica deve avere la disponibilità a rinunciare a questa pretesa e mettere in atto iniziative che a loro volta andranno a rinforzare quel suo pensiero iniziale: da una costruzione teorica (nel nostro esempio, una definizione) ad azioni (risposta a domande) e viceversa.

## 6. Retorica

Forse più di ogni altra disciplina, della matematica viene considerate il ruolo nella costruzione del pensiero razionale. Ci sono però situazioni della vita di classe nelle quali questo ruolo viene tradito. Mi riferisco ai casi in cui l'insegnante fornisce agli alunni procedure, regole o formule che conducono rapidamente alla soluzione, esentandoli da un lavoro di indagine personale, che in sé potrebbe determinare maggiori difficoltà e rischi di insuccesso. Questo però non porta l'alunno a mobilitare le proprie conoscenze, ad attivare le proprie abilità; produce azioni rivolte all'esteriorità e non all'interiorità, che sacrificano opportunità di comprensione. Queste procedure, regole o formule possono sedurre l'alunno in quanto gli facilitano la realizzazione di ciò che la scuola gli richiede. Levinas (1979, p. 180) dice che "*l'insegnamento conduce al discorso logico senza retorica, senza adulazione o seduzione e quindi senza violenza, e preservando l'interiorità di colui che accoglie*".

Luciano (pseudonimo) è un insegnante della scuola secondaria di primo grado. Nella parte finale dell'anno scolastico, incontra un collega e con lui discute di come concludere il programma (ci sarebbe molto da discutere sul ruolo del "programma"!) di matematica. Dichiara: "Adesso penso di fare il volume della sfera perché sull'opuscolo per l'esame ci sono un po' di problemi sulla sfera. Gli insegnerò la filastrocca 'il volume della sfera sai qual è? quattro terzi, pi greco erre tre' che così si fanno una risata e se la ricordano".

In questo episodio vedo il proposito di un approccio obliquo, nascondendo agli studenti la complessità del ragionamento che anche ha storicamente portato alla formula, offrendo in cambio un modo per arrivare agevolmente alla soluzione. In tutto questo ci sono aspetti riconducibili all'uso della retorica. La retorica prevede in mantenimento di una interazione con l'interlocutore ma, essendo l'arte di persuadere attraverso strumenti espressivi, tende a insidiare la libertà dell'altro. La formula del volume della sfera è uno strumento sofisticato, che rassicura gli alunni convincendoli che garantisce loro di ottenere risposte corrette. Tuttavia, essi rischiano di essere fuorviati giungendo a credere che stia nell'uso della formula l'aspetto rilevante per quanto riguarda il volume della sfera. Non viene richiesto di fare riferimento ad una giustificazione della formula, che così rischia di essere un oggetto vuoto. Il loro diritto di capire è disatteso. Nei confronti degli alunni, si compie un'ingiustizia, e questo costituisce un atto di violenza.

## 7. Giungere a proposizioni generali

La comunità dei matematici è un gruppo di persone che include ricercatori, educatori e docenti, altri professionisti, ecc. Per loro la matematica è un "oggetto d'amore", bello, affascinante e attraente; significativo, utile, potente, e anche una via per il successo personale. Essendo profondamente coinvolti nella disciplina, tendono a vedere il mondo attraverso le lenti della matematica. Non sorprende che siano propugnatori di alta considerazione e prestigio per la matematica, nella scuola e nella società; si veda (Ernest, 2019). Pavento che, appartenendo a questa comunità, l'insegnante corra il rischio di non tenere realmente in considerazione le esigenze dell'alunno il quale invece si trova in una fase di approccio iniziale alla disciplina. Ciò può avvenire, ad esempio, nell'uso del simbolismo, in particolare per introdurre un nuovo contenuto, esprimendosi in termini generali secondo le possibilità offerte dal linguaggio algebrico, senza considerare che le difficoltà degli alunni possono proprio consistere nell'uso dei simboli. Questo produce un caso particolare di quello che Levinas

(1979, p. 73) descrive come un "curioso risultato" che si contrappone a quanto visto sopra a proposito dell'origine del linguaggio nella relazione con l'Altro. In questo caso il linguaggio diventa un'oppressione dell'Altro a cui ci si rivolge e che si vorrebbe coinvolgere. Il fatto è che, secondo Levinas, il linguaggio è ben lungi dal presupporre universalità e generalità. Come insegnanti di matematica, questo dovrebbe farci riflettere sull'inadeguatezza di una presentazione in termini generali di un nuovo contenuto. Tuttavia, il linguaggio consente di giungere all'universalità e alla generalità attraverso il dialogo. Il discorso, e qui Levinas cita Platone, non è il dispiegamento di una logica precostituita ma la costruzione della verità nel confronto tra interlocutori. Così, attraverso il linguaggio si determina il passaggio dal particolare – anche da aspetti individuali – al generale. Si può vedere in questo un parallelismo con quanto avviene nella costituzione dell'etica levinasiana: essa ha origine nelle relazioni Io-Altro e non in una lista di precetti generali che gli individui possiedono o apprendono. È ben più di un parallelismo se si rammenta che linguaggio e relazione etica sono inseparabili.

In definitiva, usare il linguaggio per rivolgersi solo apparentemente all'Altro – in sostanza escludendolo – è operare violenza. Possiamo comprendere la rilevanza di questo tipo di violenza nella relazione di insegnamento/apprendimento della matematica considerando come anch'essa sia basata sul linguaggio – un linguaggio specifico. In questo paragrafo stiamo sottolineando la situazione in cui le azioni particolari e la riflessione su di esse sono finalizzate alla costruzione del caso generale: il caso particolare sul quale insegnante e alunno possano trovare l'intesa è destinato a diventare parte di un discorso comune che elimini la violenza legata a un uso distorto del linguaggio.

## 8. Etica e testi matematici

Dougan (2016) fa riferimento a Emmanuel Levinas e Hans-Georg Gadamer per un discorso sull'etica della lettura e sull'incontro dell'Altro nella letteratura. Qui voglio considerare i due filosofi per analizzare come gli studenti, nell'interpretazione di un testo matematico, instaurino una relazione etica fra esseri umani, basata in termini generali sul linguaggio e specificamente proprio sul contenuto di quel testo: da parte dello studente, con l'autore (ma non solo, come vedremo). Credo che il miglioramento di questa relazione favorisca la comprensione di nuovi contenuti da parte degli studenti, attraverso il processo di interpretazione del testo che Gadamer (2006, p.371) considera una speciale forma di dialogo. Da parte degli studenti essa richiede accettazione della proposta dell'Altro, apertura all'opportunità di seguire un ragionamento, disponibilità di rivedere, eventualmente, le proprie preconoscenze.

L'autore di un testo scolastico potrà aver cercato attraverso di esso di dare risposta a varie istanze: principalmente, in che modo veicolare quel contenuto a studenti con una certa preparazione, di una certa età, e rispetto a quali finalità. Come insegnante, per scegliere ad esempio un testo storico (da anni mi occupo di insegnamento attraverso la storia della matematica) da dare ai miei alunni, mi sono posto domande come "Quali aspetti hanno bisogno di approfondire in un certo ambito disciplinare?"

In generale, la relazione con l'autore può essere tale da meritare di essere qualificata come *etica* in quanto relazione fra esseri umani attraverso il testo, stabilita grazie alle scelte che l'autore ha fatto, dandosi obblighi verso altre persone e conferendo significato al testo. L'autore è l'Altro del lettore e la relazione avviene nella reciproca responsabilità. Considero che sia grazie a questa relazione etica che la comprensione del testo ha luogo.

Il testo è indicato allo studente dall'insegnante (anche se non è escluso che l'abbia scelto da sé). In (Demattè, 2019) mostro che in un testo può essere trovata traccia dell'autore ma anche traccia di altre persone, considerato che ha una storia. Il testo è così luogo dove possono essere stabilite varie relazioni etiche dello studente. La complessità di queste possibili relazioni determinate dal testo – che non è possibile riportare in un elenco – mi inducono a usare l'espressione "relazione etica con il testo".

È banale ricordare l'importanza dei testi scritti nella trasmissione della conoscenza matematica: nella storia, nella ricerca scientifica attuale, nella divulgazione, ecc. Lo studio di un testo può essere spesso essenziale per lo studente quando non si è potuto avvalere della spiegazione dell'insegnante come nel caso in cui non ha potuto partecipare alla lezione in classe o nel caso di corsi online nei quali l'interazione con l'insegnante è ridotta, come è avvenuto durante la pandemia. Pensiamo al valore di un libro di testo rispetto al percorso formative di uno studente, che attraverso di esso (anche se non in modo esclusivo) viene introdotto allo studio della matematica. Le diverse persone che hanno traccia nel testo assumono il ruolo di guida. Nella relazione etica, esse danno implicitamente un messaggio di "esortazione" - termine che Levinas stesso utilizza - mostrando come l'attività matematica sia opera di persone. Questo ritengo sia elemento primigenio che può determinare il coinvolgimento dello studente nello studio della disciplina.

Il testo matematico ha un autore che presenta il contenuto e un lettore che segue e ricostruisce il ragionamento dell'autore: argomentazioni, passaggi algebrici, dimostrazioni, ecc. Quando la relazione è così stabilita, il lettore è chiamato a un processo di condivisione di idee con l'autore. Tuttavia. sarebbe ingenuo pensare a un'identificazione del lettore con l'autore poiché la loro rispettiva attribuzione di significato a procedure e concetti difficilmente coinciderà (pensiamo ancora al caso dello studente e dell'autore di un libro di testo). L'interpretazione dello studente è personale, ha lui l'iniziativa mentre l'autore ha un ruolo passivo. Eppure, lo scritto riporta la sua proposta che attiva il processo di interpretazione… È quello che avviene nella relazione viso a viso descritta da Levinas: addirittura nella passività di due esseri che si incontrano, avviene l'instaurarsi della relazione etica da cui potranno discendere atteggiamenti, discorsi, iniziative.

Il fatto che la relazione fra lettore e autore avvenga attorno a un ragionamento matematico riconosco che possa determinare una problematica per molti aspetti diversa rispetto a quella di due esseri che "semplicemente" si incontrano (si notino le virgolette che vogliono suggerire come anche in questo caso parlare di semplicità sia improprio, come dimostra l'ampia e articolata analisi che fa Levinas). La relazione etica con l'Altro attraverso il testo può sembrare un fatto paradossale nel caso di un testo matematico. Tuttavia, può avvenire che esso conservi elementi relativi all'autore, come mostrato in (Demattè, 2019) nel caso di un documento storico, grazie al riferimento a vari aspetti della quotidianità del medioevo, all'assenza di un simbolismo, all'esposizione difforme rispetto a quella di un testo moderno. Questo rivela la traccia dell'autore, il quale peraltro non si palesa interamente, come del resto mantiene la sua trascendenza l'Altro che incontriamo nella vita di tutti i giorni ma col quale pur sempre instauriamo una relazione che Levinas chiama etica.

## 9. Quali concezioni degli studenti?

Le situazioni didattiche che stiamo esaminando nel presente articolo e che consideriamo nella loro criticità ritengo possano indurre nello studente concezioni come quelle per cui, ad esempio, le richieste della scuola non comprendono l'esigenza di comprendere, oppure il comprendere in matematica consiste proprio nel mettere in atto procedure fornite dall'insegnante, nell'applicare formule di ignota origine, nell'utilizzare definizioni artificiose. Ritengo che ogni insegnante possa ritrovare nella propria quotidianità di classe casi di alunni che rientrano fra quelli che hanno assunto concezioni questo tipo. Qui voglio solo riportare un passo da un lavoro di Doris (pseudonimo), una studentessa del quinto anno di un liceo delle scienze umane che lamenta la difficoltà dell'interpretazione di un testo di Eulero tratto da *Introductio in Analysin Infinitorum*, opera che comprende peraltro varie parti adatte al lavoro con gli studenti della scuola secondaria: si veda (Demattè & Furinghetti, 2014). Doris:

*"La matematica personalmente è un concetto da capire attraverso la pratica di esercizi e formule,*

*invece, attraverso un testo […], mi sono trovata maggiormente in difficoltà poiché non mi permetteva di comprendere il concetto di logaritmo […] in modo esplicito e diretto. Questo lavoro distoglieva la mia attenzione dal vero scopo, ovvero quello di interiorizzare il concetto; invece, il lavoro di tradurre e comprendere il testo in sé quindi il ragionamento per arrivare alla comprensione del concetto era molto enigmatico e prolungato;"*

si veda anche (Demattè, 2022b). Se la scuola non incoraggia la ricerca della comprensione (in questo caso di un documento opera di un matematico importante, ma può anche trattarsi di un brano di un libro di testo) ritengo che gli alunni siano indotti a fare del testo un utilizzo strumentale finalizzato al successo scolastico, a impadronirsi del testo accantonando la condivisione di ragionamenti nella relazione etica. Si tratta dunque di un atto di violenza da parte degli alunni, riguardo alle persone che hanno traccia nel testo.

La violenza da parte dell'insegnante che si contrappone alla relazione etica e non favorisce la comprensione trova corrispettivo negli atteggiamenti degli alunni. Forse chiamare violenti atti come quelli qui descritti e riguardanti un testo matematico può sembrare eccessivo. Tuttavia, le conseguenze dal punto di vista educativo ritengo siano rilevanti. Lo sono in modo parossistico se questi atti entrano a far parte della consuetudine. Personalmente ritengo che purtroppo ciò avvenga.

## 10. Conclusioni

Non ho voluto dare una definizione di violenza, nemmeno nell'ambito dell'educazione matematica; del resto, nemmeno Levinas – dal quale ho tratto sistematicamente spunto – lo fa nella sua opera. Ho voluto piuttosto presentare varie situazioni a titolo di esempio. Se una conclusione di carattere generale si può trarre, essa riguarda il fatto che questi atti di violenza hanno conseguenze sull'apprendimento da parte degli alunni in quanto la relazione che ho chiamato *etica* nei confronti delle persone latrici della proposta matematica si realizza attraverso la partecipazione a un ragionamento. Il fatto che l'alunno ne venga distolto può avere conseguenze gravi per l'utilizzo che viene indotto a fare del sapere matematico (per non dire della possibilità che si distacchi del tutto dallo studio della disciplina).

Forse può accadere che si consideri *non violento* un atto di accondiscendenza, di remissività o di indulgenza. Lo stesso Levinas conferma che non è così, ad esempio quando parla di "Asimmetria" delle relazioni interpersonali in quanto l'Altro si presenta in una "dimensione di altezza", tuttavia non nemico: è il nostro orientamento a partire da noi stessi e a dare priorità alla nostra autotutela che ce lo può far ritenere, oltre che "straniero", anche ostile; si veda (Levinas, 1979, p. 215). Lo studente può vedere l'insegnante in una dimensione di altezza, di "trascendenza", senza considerare questo come premessa alla violenza. La asimmetria si mantiene anche se riferita all'insegnante nella sua relazione con lo studente, quando la sua iniziativa è dettata dalle esigenze del suo interlocutore. Magari una sua presa di posizione "dura" può sembrare per l'immediato un atto violento ma in realtà può essere stata concepita in vista delle conseguenze future e quindi come atto di responsabilità.

Un testo matematico è un luogo dove lo studente si mette in relazione con l'Altro la cui traccia è nel testo accanto a quella di altre persone. Nella relazione etica, lo studente è catturato dal testo piuttosto che essere lui a dominarlo per servirsene in vista di scopi legati al successo scolastico. Attraverso l'insegnante, la scuola riveste un ruolo negativo insidiando la continuità di questa relazione e di conseguenza la possibilità di apprendimento, compiendo così un atto di violenza.

Il comprendere non è mai totale, assoluto e definitivo. L'interpretazione di un testo matematico da parte di un esperto è diversa rispetto a quella di uno studente. Nella relazione dialogica tra insegnante e docente, l'insegnante come esperto della disciplina chiede o afferma, e implicitamente fornisce così criteri per il comprendere. Ho voluto mostrare che non è eticamente ed educativamente accettabile il caso in cui lo studente non abbia capito ma, nonostante ciò, riceva apprezzamenti dalla scuola. La consapevolezza di non sapere può essere risorsa e stimolo per la futura ricerca della comprensione, attraverso nuove relazioni etiche.

Molti autori si sono accostati a Levinas e hanno considerato i possibili contributi del suo pensiero all'educazione; si veda, fra gli altri (Joldersma, 2014). Zhao (2016), nell'introduzione a una raccolta di articoli, evidenzia che non siano contributi che fanno riferimento a una coerente interpretazione dell'opera di Levinas ma di variegati approcci attraverso il suo pensiero all'attuale contesto educativo. Forse inevitabilmente accade che chi si confronti con il pensiero di Levinas tragga conseguenze pesantemente condizionate dalla realtà che, come educatore, vive.

**Bibliografia**

Arcavi, A., & Isoda, M. (2007). Learning to listen: from historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(2), pp. 111–129.

Boylan, M. (2016). Ethical dimensions of mathematics education, *Educational Studies in Mathematics*, 92(3), pp. 395-409.

Demattè, A. (2019). Searching for the Other in a Historical Document *Philosophy of Mathematics Education Journal*, No. 35. Disponibile in:

https://education.exeter.ac.uk/research/centres/stem/publications/pmej/pome35/index.html.Demattè, A. (2022a). Violence in Mathematics Teaching. Reflections Inspired by Levinas' Totality and Infinity. *Journal of Humanistic Mathematics*, Volume 12, Issue 2, 72-97. Disponibile in: https://scholarship.claremont.edu/jhm/vol12/iss2/7.

Demattè, A. (2022b). Relazione etica degli studenti con un documento tratto dalla storia della matematica. *Didattica della Matematica*, n. 12, 22-44. Disponibile in:
https://www.journals-dfa.supsi.ch/index.php/rivistaddm/issue/view/21.

Demattè, A., & Furinghetti, F. (2014). History in the mathematics laboratory: an exploratory study. In M. Kourkoulos & C. Tzanakis (Eds.), *Ιστορία των Μαθηματικών καιΜαθηματική Εκπαίδευση – Special Issue of Education Sciences* (114–130). University of Crete.

Demattè, A. & Guillemette, D. (2019). Levinas e l'insegnamento non violento della matematica. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate,* Vol.42B, N.1.

Dougan, M. J. (2016). *The Ethics of Reading: Levinas and Gadamer on encountering the other in literature*. Thesis, Doctor of Philosophy (PhD). University of Waikato, Hamilton, New Zealand.

Ernest, P. (2018). The Ethics of Mathematics: Is Mathematics Harmful? In P. Ernest (Ed.). *The Philosophy of Mathematics Education Today*. Switzerland: Springer.

Ernest, P. (2019). Privilege, Power and Performativity: The Ethics of Mathematics in Society and Education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, No. 35. Disponibile in:
https://education.exeter.ac.uk/research/centres/stem/publications/pmej/pome35/index.html.

Gadamer, H.-G. (2006). *Truth and Method*. London, New York: Continuum.

Guillemette, D. (2018). The ethical subject of Levinas. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the*

*Psychology in Mathematics Education* (*Otherness in Mathematics Education* Vol. 1, pp. 95–123). PME.

Guillemette, D. & Demattè, A. (2022). A Discussion on Levinas's Ethics of Otherness, Originals from the History and Teaching-Learning Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, vol. 42, num. 2, pp. 22-28.

Joldersma, C.W. (2014). *A Levinasia Ethics for Education's Commonplaces*. London: Palgrave Pivot.

Levinas, E. (1979). *Totality and Infinity – An Essay on Exteriority*. Martinus Nijhoff Publishers: The Hague/Boston/London.

Radford, L. (2021). Mathematics teaching and learning as an ethical event. *La matematica e la sua didattica*, 29(2), pp. 185–198.

Radford, L. y Lasprilla Herrera, A. (2020). De por qué la ética es ineludible de considerar en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, *La matematica e la sua didattica,* anno 28 n.1.

Zembylas, M. & Vrasidas, C. (2005). Levinas and the ''inter-face'': the ethical challenge of online education, *Educational Theory*, Volume 55, Number 1.

Zhao, G. (2016). Levinas and the Philosophy of Education. *Educational Philosophy and Theory*, 48:4.

L'accesso ai siti citati è stato verificato in data 15-09-2023.

# Dall’aula

# Social Choices in un esperimento di classe

**Giovanna Bimonte**
Dipartimento di Scienze Economiche e Statistiche, Università di Salerno

gbimonte@unisa.it

## SEZIONE 1: Scheda di presentazione

| | |
|---|---|
| **Titolo** | **Social Choices in un esperimento di classe** |
| **Grado Scolastico** | L'attività è stata svolta nelle classi quinte del Modulo di Matematica ed Economia del Progetto Liceo Matematico sviluppato dal gruppo di ricerca di didattica della matematica del Dipartimento di Matematica in collaborazione con il Dipartimento di Scienze Economiche e Statistiche dell'Università di Salerno,<br>l'attività è proponibile in una classe del triennio, preferibilmente quarta o quinta per le connessioni interdisciplinari del percorso, in qualsiasi istituto secondario superiore. |
| **Tematica affrontata** | **Teoria delle decisioni, Teoria matematica dei Giochi, Economia Matematica** |
| **Descrizione** | Il laboratorio, incentrato sulle tematiche economiche e sociali, ha avuto come obiettivo quello di sfruttare la naturale curiosità degli studenti sulle questioni relative ai sistemi di scelta. Gli studenti sono stati coinvolti in un percorso didattico d'impianto costruttivista, grazie ad un approccio euristico sono stati sollecitati a riflettere sulle domande proposte ed a formulare le proprie intuizioni e deduzioni prima di proporre loro le risposte rigorose e formali fondate sulla teoria. In questo modo, abbiamo costruito le scelte collettive, partendo dalle scelte individuali, ponendo l'accento sugli effetti delle proprie decisioni e sulla possibilità di influenzare i risultati aggregati. Gli studenti hanno, così, potuto apprendere in modo attivo le nozioni di Teoria dei giochi e di Economia matematica con particolare attenzione per la Teoria delle scelte sociali. |

<table>
<tr>
<td>Obiettivi con eventuali riferimenti agli assi culturali e/o alle indicazioni nazionali</td>
<td>
<u>INDICAZIONI NAZIONALI</u><br>
Storia<br>
[…] al termine del quinquennio liceale, lo studente conosca bene i fondamenti del nostro ordinamento costituzionale, […] maturando altresì., anche in relazione con le attività svolte dalle istituzioni scolastiche, le necessarie competenze per una vita civile attiva e responsabile.<br><br>
Matematica<br>
Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici. […] Il percorso, quando ciò si rivelerà opportuno, favorirà l’uso di questi strumenti, anche in vista del loro uso per il trattamento dei dati nelle altre discipline scientifiche. […]<br><br>
<u>NUCLEI TEMATICI FONDAMENTALI</u><br>
PROBABILITÀ E STATISTICA<br>
Statistica descrittiva<br><br>
<u>ASSI CULTURALI</u><br>
L’asse matematico.<br>
L’asse matematico ha l’obiettivo di far acquisire allo studente saperi e competenze che lo pongano nelle condizioni di possedere una corretta capacità di giudizio e di sapersi orientare consapevolmente nei diversi contesti del mondo contemporaneo. [...] Finalità dell’asse matematico è l’acquisizione al termine dell’obbligo d’istruzione delle abilità necessarie per applicare i principi e i processi matematici di base nel contesto quotidiano della sfera domestica e sul lavoro, nonché per seguire e vagliare la coerenza logica delle argomentazioni proprie e altrui in molteplici contesti di indagine conoscitiva e di decisione.<br><br>
COMPETENZE<br>
Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l’ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico.<br><br>
L’asse scientifico-tecnologico<br>
L’asse scientifico-tecnologico ha l’obiettivo di facilitare lo studente nell’esplorazione del mondo circostante, per osservarne i fenomeni e comprendere il valore della conoscenza del mondo naturale e di quello delle attività umane come parte integrante della sua formazione globale. [...] Le competenze dell’area scientifico-tecnologica [...] concorrono a potenziare la capacità dello studente di operare scelte consapevoli ed autonome nei molteplici contesti, individuali e collettivi, della vita reale.<br><br>
COMPETENZE<br>
Osservare, descrivere ed analizzare fenomeni appartenenti alla realtà naturale e artificiale e riconoscere nelle sue varie forme i concetti di sistema e di complessità
</td>
</tr>
</table>

| | |
|---|---|
| | **L'Asse storico-sociale**<br>L'asse storico-sociale si fonda su tre ambiti di riferimento: epistemologico, didattico, formativo. [….] Se sul piano epistemologico i confini tra la storia, le scienze sociali e l'economia sono distinguibili, più frequenti sono le connessioni utili alla comprensione della complessità dei fenomeni analizzati. […]<br><br>COMPETENZE<br>Collocare l'esperienza personale in un sistema di regole fondato sul reciproco riconoscimento dei diritti garantiti dalla Costituzione, a tutela della persona, della collettività e dell'ambiente |
| **Tempo impiegato** | **5 ore** |
| **Discipline coinvolte** | **Matematica, Economia, Storia, Educazione civica** |

**SEZIONE 2: Un laboratorio in classe**

L'attività "Social Choices" è stata svolta nel Modulo di Matematica ed Economia sviluppato dal gruppo di ricerca di didattica della matematica del Dipartimento di Matematica in collaborazione con il Dipartimento di Scienze Economiche e Statistiche dell'Università di Salerno ed è stata proposta agli studenti delle classi quinte dei Licei che partecipano al Progetto di Ricerca "Liceo Matematico". Tale modulo è finalizzato a fornire modelli matematici ed economici che consentano agli studenti di analizzare e comprendere le dinamiche delle decisioni in vari contesti per la costruzione di una visione unitaria dei problemi storico-politici-economici reali in un'ottica interdisciplinare che va oltre la tradizionale frammentazione del curriculum scolastico.

L'idea del laboratorio è quella di voler coinvolgere gli studenti nell'apprendimento attivo, sfruttando la loro naturale curiosità per le questioni economiche e sociali, e farli riflettere sulle domande prima di cercare di dare loro delle risposte fondate sulla teoria. Il laboratorio è stato progettato per essere fruito on-line, a causa delle restrizioni legate alla pandemia da COVID-19. Gli esperimenti di classe hanno coinvolto gli studenti, individualmente o in gruppo, e sono stati condotti con discussioni introduttive molto brevi, poche delucidazioni durante la fase di scelta degli studenti e approfondimenti teorici con relativo commento dei risultati al termine delle attività proposte. In questo modo, gli studenti hanno potuto apprendere in modo attivo le nozioni di scelte sociali, teoria dei giochi e, più in generale, di economia matematica.

L'idea di partenza è stata provare a costruire scelte collettive e ad influenzare le scelte collettive partendo dalle scelte individuali.

La teoria dei giochi è fondata su alcune ipotesi che caratterizzano il modo fondamentale di agire (e di pensare) degli individui: gli individui, infatti, che interagiscono in un problema decisionale si suppone siano intelligenti e razionali. L'individuo razionale in senso stretto è in grado di ordinare le sue preferenze su un insieme di risultati; le sue preferenze, inoltre, soddisfano l'insieme di assiomi di razionalità di von Neumann e Morgenstern.
Le domande degli esperimenti in classe sono state attentamente progettate, affinché l'apprendimento fosse basato sulla scoperta, per mezzo dei materiali e delle informazioni fornite agli studenti, e dei dati raccolti. Il ruolo del docente diventa quello di agire come facilitatore, ponendo domande guida e attirando l'attenzione sui risultati interessanti che emergono al termine delle attività di scelta.

Successivamente, gli studenti sono stati condotti alla scoperta del quadro storico e teorico attraverso una formalizzazione matematica rigorosa. Negli esperimenti in classe gli studenti sono stati coinvolti nel commento dei dati raccolti e nell'osservazione dei fenomeni e delle caratteristiche presenti. Come in una dimostrazione interattiva in classe, agli studenti coinvolti nella attività è stato chiesto di fare previsioni e di riflettere sulle loro osservazioni e sulle motivazioni alla base delle scelte degli altri studenti. Per alcuni esperimenti, il risultato è stato "sorprendente" ma convincente, in questo modo gli studenti hanno potuto costruire la proprietà della nuova idea emersa e usarla per sostenere l'apprendimento.

### *2.1 Prendere una decisione*

Gli individui ogni giorno si trovano in situazioni in cui devono prendere decisioni, utilizzando le informazioni disponibili, valutando e interpretando gli esiti delle scelte possibili, al fine di selezionare un'azione tra diverse alternative: ad esempio, scegliere di acquistare un oggetto, selezionare un candidato in una votazione, partecipare ad un'asta. Il processo decisionale passa attraverso l'interpretazione e la valutazione di tutte le possibili alternative in maniera pianificata, cioè da una scelta ragionata, oppure può essere frutto di una scelta "automatica" in situazioni già sperimentate in passato. Lo studio del processo decisionale ha il compito di prevedere come un individuo si comporta nello scegliere un'alternativa piuttosto che un'altra, sapendo che rispondono al principio di razionalità. La Teoria dell'Utilità Attesa di von Neumann e Morgenstern (1947) considera le decisioni di un individuo basate sul presupposto della razionalità degli individui. Potremmo dire che l'individuo, attraverso la risoluzione di un semplice "algoritmo algebrico" composto da un insieme di specifiche informazioni in possesso dal soggetto, prende una decisione tra tutte le alternative possibili. L'individuo ordina le proprie preferenze e costruisce una vera e propria funzione di scelta. La situazione si complica quando ci sono più agenti a scegliere e bisogna tirare fuori una sola alternativa tra tutte le possibili.

La teoria della Scelta Sociale è lo studio dei processi e delle procedure di decisione collettiva. Si tratta di un insieme di modelli e risultati riguardanti l'aggregazione delle scelte (input) individuali (per esempio, voti, preferenze, giudizi, benessere) in scelte (output) collettive.
Quello che ci chiediamo è: Come può un gruppo di individui scegliere un risultato vincente (ad esempio in politica un candidato elettorale) da un dato insieme di opzioni? Quali sono le proprietà dei diversi sistemi di voto? È possibile arrivare a costruire preferenze collettive coerenti sulla base delle preferenze individuali? Se sì, come?

L'obiettivo del nostro laboratorio è stato dare risposta a queste domande osservando esempi concreti presi dalla realtà; costruendo attività in cui gli studenti dovevano scegliere e motivare le proprie azioni; mostrando i modelli teorici e i risultati attesi in letteratura e, infine, mostrando i teoremi e la formalizzazione matematica alla base delle scelte individuali e collettive.

### *2.2 Un po' di Storia*

I primi a studiare le Scelte sociali sono stati Nicolas de Condorcet (1743-1794) e Jean-Charles de Borda nel 18° secolo e, nel 19° secolo, Charles Dodgson (noto anche come Lewis Carroll). La teoria della scelta sociale è decollata nel 20° secolo con i lavori di Kenneth Arrow, Amartya Sen e Duncan Black. La loro influenza si estende attraverso l'economia, la scienza politica, la filosofia, la matematica e recentemente l'informatica e la biologia. Oltre a contribuire alla nostra comprensione delle procedure di decisione collettiva, la Teoria della scelta sociale ha applicazioni nelle aree del design istituzionale, dell'economia del benessere e dell'epistemologia sociale.

Condorcet era un pensatore liberale all'epoca della Rivoluzione francese che fu perseguito dalle autorità rivoluzionarie per averle criticate. Dopo un periodo di clandestinità, fu infine arrestato, anche se apparentemente non immediatamente identificato, e morì in prigione. Nel suo *Essay on the*

*Application of Analysis to the Probability of Majority Decisions* (1785), sostenne un particolare sistema di voto, il voto a maggioranza a coppie, e presentò le sue due intuizioni più importanti. La prima, nota come *Teorema della Giuria di Condorcet*, è che se ogni membro di una giuria ha una probabilità uguale e indipendente migliore del caso, ma peggiore del prefetto, di dare un giudizio corretto sulla colpevolezza o meno di un imputato; la maggioranza dei giurati ha più probabilità di essere corretta di ogni singolo giurato; e la probabilità di un giudizio di maggioranza corretto si avvicina a 1 all'aumentare delle dimensioni della giuria. Quindi, in certe condizioni, la regola della maggioranza è buona per "trovare la verità":

***Teorema della Giuria di Condorcet:*** *Sia $n = 2m + 1$ il numero di individui di una giuria, e sia $p$ la probabilità che un individuo membro della giuria prenda la decisione giusta. Definiamo con $h_n(p)$ la probabilità che una maggioranza di membri della giuria faccia la scelta giusta, quando gli agenti agiscono in maniera indipendente. Allora se $p > 1/2$ e $n \geq 3$,*

I. $h_n(p) > p$, *e*
II. $h_n(p) \to 1$ *quando* $n \to \infty$

Il Teorema della giuria di Condorcet, dunque, afferma che in condizioni abbastanza generali, la regola della maggioranza aggregherà efficientemente le credenze e porterà a risultati "buoni" se gli elettori votano in modo non strategico. Non strategico vuol dire che gli elettori votano semplicemente per il risultato che sceglierebbero se fossero l'unico elettore.

La seconda intuizione di Condorcet, spesso chiamata *Paradosso di Condorcet*, è l'osservazione che le preferenze della maggioranza possono essere "irrazionali", o meglio, intransitive, anche quando le preferenze individuali sono "razionali" (transitive). Consideriamo tre alternative tra cui scegliere, **x, y e z**, e supponiamo che un terzo di un gruppo preferisca l'alternativa **x** a **y** a **z**, un altro terzo preferisca **y** a **z** a **x**, e infine un terzo ancora preferisca **z** a **x** a **y**. Allora ci sono maggioranze (di due terzi) per **x** contro **y**, per **y** contro **z**, e per **z** contro **x**, tali per cui si genera un *ciclo*, che viola la transitività. Inoltre, nessuna alternativa è un vincitore di Condorcet: un'alternativa, cioè, che batte, o almeno pareggia, ogni altra alternativa in gare di maggioranza a coppie.

Condorcet ha anticipato un tema chiave della moderna teoria della scelta sociale: la regola della maggioranza è allo stesso tempo un metodo plausibile di decisione collettiva e tuttavia soggetto ad alcuni problemi sorprendenti. Risolvere o aggirare questi problemi rimane una delle preoccupazioni principali della teoria della scelta sociale.

Mentre Condorcet aveva studiato un particolare metodo di voto, il voto a maggioranza, Kenneth Arrow, che vinse il premio Nobel per l'economia nel 1972, introdusse un approccio generale allo studio dell'aggregazione delle preferenze, in parte ispirato dal suo insegnante di logica, Alfred Tarski (1901-1983), dal quale era stato introdotto alla Teoria delle relazioni. Arrow considerò una classe di possibili metodi di aggregazione, che chiamò Funzioni di Benessere Sociale, e chiese quali di essi soddisfacessero certi assiomi o desiderata. Ha dimostrato che non esiste un metodo per aggregare le preferenze di due o più individui su tre o più alternative in preferenze collettive, dove questo metodo soddisfa cinque assiomi: *Teorema di Impossibilità di Arrow.*

***Teorema dell'impossibilità di Arrow:*** *Non è possibile aggregare le preferenze individuali razionali di un gruppo d'individui in una qualsiasi funzione di scelta sociale a meno di violare uno dei seguenti assiomi:*

1. *Razionalità: La regola di scelta sociale rappresenta preferenze sociali complete e transitive;*
2. *Dominio non ristretto: Non si pongono restrizioni a priori alle preferenze di ciascun individuo;*

3. *Indipendenza dalle alternative irrilevanti: La scelta sociale sulle alternative X e Y deve dipendere solo dalle preferenze degli individui su X e Y;*
4. *Non dictatorship: Non c'è un dittatore, ovvero un individuo che impone sempre le sue scelte;*
5. *Pareto assumption: se tutti gli individui preferiscono una certa opzione X all'opzione Y, allora Xdeve essere preferita a Y anche nella funzione di scelta sociale.*

Il contemporaneo e coetaneo di Condorcet, Jean-Charles de Borda (1733-1799), difese un sistema di voto che è spesso visto come un'importante alternativa al voto a maggioranza. Il *Conteggio di Borda* evita il paradosso di Condorcet ma viola una delle condizioni di Arrow, l'Indipendenza delle alternative irrilevanti. Così il dibattito tra Condorcet e Borda è un precursore di alcuni dibattiti moderni sulle risposte possibili al Teorema di Arrow.

Nel XIX secolo, il matematico ed ecclesiastico britannico Charles Dodgson (1832-1898), meglio conosciuto come Lewis Carroll, riscoprì indipendentemente molte delle intuizioni di Condorcet e Borda e sviluppò anche una teoria della rappresentazione proporzionale. Fu in gran parte grazie all'economista scozzese Duncan Black che le idee teoriche di Condorcet, Borda e Dodgson furono portate all'attenzione della comunità di ricerca moderna.

*2.3 La teoria delle Scelte Sociali: dalle scelte individuali a quelle collettive*

*2.3.1 Scelte Sociali*

Per introdurre formalmente la teoria della scelta sociale, è utile considerare un semplice problema di decisione: una scelta collettiva tra due alternative.

Sia N = {1, 2, ..., n} un insieme di individui, dove n ≥ 2. Gli individui devono scegliere tra due alternative possibili. Ogni individuo i ∈ N esprime un voto, denotato vi, dove

- $v_i = 1$ rappresenta un voto per la prima alternativa,
- $v_i = -1$ rappresenta un voto per la seconda alternativa.

Una combinazione di voti tra gli individui,$< v_1, v_2, \dots, v_n >$, è chiamata profilo. Per ogni profilo, il gruppo cerca di arrivare ad una decisione sociale v, dove

- $v = 1$ rappresenta una decisione per la prima alternativa,
- $v = -1$ rappresenta una decisione per la seconda alternativa

Una regola di aggregazione è una funzione $f$ che assegna ad ogni profilo $< v_1, v_2, \dots, v_n >$ (in qualche dominio di profili ammissibili) una decisione sociale $v = f(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Le più diffuse regole di aggregazione delle scelte sono:

**Unanimity rule**: Per ogni profilo di scelte $< v_1, v_2, \dots, v_n >$,

$$f(v_1, v_2, \dots, v_n) = \{1 \; if v_1 = v_2 = \cdots = v_n = 1 \; -1 \; if v_1 = v_2 = \cdots = v_n = -1.$$

**Majority rule**: Per ogni profilo di scelte $< v_1, v_2, \dots, v_n >$,

$$f(v_1, v_2, \dots, v_n) = \{1 \; if v_1 + v_2 + \cdots + v_n > 0 \; 0 \; if v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 0 \; -1 \; if v_1 + v_2 + \cdots + v_n < 0.$$

**Dictatorship**: Per ogni profilo di scelte $< v_1, v_2, \dots, v_n >$,

$$f(v_1, v_2, \dots, v_n) = v_i,$$

dove i ∈ N è il dittatore.

**Weighted majority rule:** Per ogni profilo di scelte $< v_1, v_2, \dots, v_n >$,

$$f(v_1, v_2, \dots, v_n) = \{1\ if w_1 v_1 + w_2 v_2 + \cdots + w_n v_n > 0\ 0\ if w_1 v_1 + w_2 v_2 + \cdots + w_n v_n = 0\ -1\ if w_1 v_1 + w_2 v_2 + \cdots + w_n v_n < 0$$

dove $w_1, w_2, \dots, w_n$ sono numeri reali, interpretabili come pesi degli *n* individui.

Una regola di aggregazione è definita in maniera estensiva, cioè è una mappatura (una relazione funzionale) tra input individuali e output collettivi. La regola di aggregazione è definita per un insieme fisso di individui N e un problema decisionale fisso, così che la regola di maggioranza in un gruppo di due individui è un oggetto matematico diverso dalla regola di maggioranza in un gruppo di tre.

May (1952) ha introdotto per primo dei requisiti per costruire, a partire dalle scelte individuali, delle decisioni sociali e ha dimostrato che la *Majority rule* è l'unica regola di aggregazione che soddisfa tutti i requisiti:

I. *Dominio universale*: Il dominio degli input individuali ammissibili consiste in tutti i profili logicamente possibili di voti $< v_1, v_2, \dots, v_n >$, dove ogni $v_i \in \{-1,1\}$.
II. *Anonimato*: Per ogni coppia di profili ammissibili $< v_1, v_2, \dots, v_n >$ e $< r_1, r_2, \dots, r_n >$che sono permutazioni l'uno dell'altro, la decisione sociale che ne consegue sarà la stessa, cioè, $f(v_1, v_2, \dots, v_n) = f(r_1, r_2, \dots, r_n)$.
III. *Neutralità*: Per qualsiasi profilo ammissibile $< v_1, v_2, \dots, v_n >$, se i voti delle due alternative sono invertiti, anche la decisione sociale è invertita, cioè $f(-v_1, -v_2, \dots, -v_n) = -f(v_1, v_2, \dots, v_n)$.
IV. *Positive responsiveness*: Per qualsiasi profilo ammissibile $< v_1, v_2, \dots, v_n >$, se alcuni elettori cambiano i loro voti a favore di un'alternativa e tutti gli altri voti rimangono gli stessi, la decisione sociale non cambia nella direzione opposta; se la decisione sociale era un pareggio prima del cambiamento, il pareggio è rotto nella direzione del cambiamento, cioè, se $w_i > v_i$per alcuni i e $w_j = v_j$ per tutti gli altri j, e $f(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0$ oppure $f(v_1, v_2, \dots, v_n) = 1$, allora $f(w_1, w_2, \dots, w_n) = 1$.

Il Dominio universale richiede che la regola di aggregazione faccia fronte a qualsiasi livello di "pluralismo" nei suoi input; l'Anonimato richiede che tutti gli elettori siano trattati allo stesso modo; la Neutralità richiede che tutte le alternative siano trattate allo stesso modo; e la *Positive responsiveness* richiede che la decisione sociale sia una funzione positiva del modo in cui la gente vota. May dimostrò quanto segue:

***Teorema (May 1952)***: *Una regola di aggregazione soddisfa il Dominio universale, l'Anonimato, la Neutralità e la Positive responsiveness se e solo se è la regola della maggioranza.*

Possiamo osservare che le dittature e le regole di maggioranza ponderata con pesi individuali diversi violano l'anonimato. Le regole di super maggioranza asimmetrica, sotto le quali una larga maggioranza dei voti, come due terzi o tre quarti, è richiesta per una decisione a favore di una delle alternative, violano la neutralità. Le regole di maggioranza simmetrica, in base alle quali nessuna alternativa viene scelta a meno che non sia supportata da una maggioranza sufficientemente grande, violano la Positive responsiveness.

### *2.3.2 L'aggregazione delle preferenze*

Il punto fondamentale della Teoria della Scelta Sociale è l'analisi dell'aggregazione delle preferenze, intesa come l'aggregazione delle "classifiche" di preferenza di più individui su due o più alternative sociali in una singola classifica di preferenza (o scelta) collettiva su queste stesse alternative. Consideriamo un insieme $N = \{1,2, \dots, n\}$di individui $(n \geq 2)$. Sia $X = \{x, y, z, \dots\}$ un insieme di alternative sociali, per esempio mondi possibili, piattaforme politiche, candidati alle elezioni o allocazioni di beni. Ogni individuo $i \in N$ ha un ordine di preferenza $R_i$ su queste alternative: una relazione binaria completa e transitiva su $X$. Per ogni $x, y \in X$, $xR_iy$ significa che l'agente i preferisce debolmente $x$a $y$. Scriviamo $xP_iy$ se $xR_iy$ e non $yR_ix$ (l'agente $i$ preferisce strettamente $x$ a $y$), e $xI_iy$ se $xR_iy$ e $yR_ix$ (l'individuo i è indifferente tra $x$ e $y$).

Una combinazione di ordinamenti di preferenze tra tutti gli individui,$< R_1, R_2, \ldots, R_n >$, è chiamata profilo. Una regola di aggregazione delle preferenze, $F$, è una funzione che assegna ad ogni profilo $< R_1, R_2, \ldots, R_n >$(in qualche dominio di profili ammissibili) una relazione di preferenza sociale $R = F(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ su $X$.

Per qualsiasi $x, y \in X$, $xRy$ significa che $x$ è socialmente debolmente preferito a $y$. Scriviamo anche $xPy$ se $xRy$ e non $yRx$ ($x$ è strettamente preferito a $y$), e $xIy$ se $xRy$ e $yRx$ ($x$ e $y$ sono socialmente indifferenti). In generale, l'assunzione che $R$ sia una relazione completa e transitiva non è sempre incorporato nella definizione di una regola di aggregazione delle preferenze.

Prendiamo ad esempio la regola di aggregazione delle preferenze del voto a maggioranza a coppie, cioè il vincitore di Condorcet.

***Regola di Condorcet:*** *Per qualsiasi profilo di strategie $< R_1, R_2, \ldots, R_n >$ e per ogni coppia$x, y \in X$, $xRy$ se e solo se almeno tanti individui hanno $xR_iy$ quanti hanno $yR_ix$, formalmente$|i \in N: xR_iy| \geq |i \in N: yR_ix|$.*

Questa proprietà non garantisce preferenze sociali transitive, in particolare si può mostrare che la proporzione di profili di preferenza (tra tutti quelli possibili) che portano a preferenze maggioritarie cicliche aumenta con il numero di individui $(n)$ e il numero di alternative$(|X|)$.

Un secondo esempio di regola di aggregazione delle preferenze è il
***Conteggio Borda:*** Per qualsiasi profilo $< R_1, R_2, \ldots, R_n >$ *e per ogni coppia $x, y \in X$, $xRy$ se e solo se* $\sum_{i \in N} |\{z \in X: xR_iz\}| \geq \sum_{i \in N} |\{z \in X: yR_iz\}|$. In pratica, ogni elettore assegna un punteggio ad ogni alternativa, che rispecchia il suo ordinamento delle preferenze. L'alternativa maggiormente preferita riceve un punteggio di $k$ (dove $k = |X|$), la seconda alternativa più scelta riceve un punteggio di $k - 1$, e così via. Le alternative sono poi ordinate socialmente in termini di somme dei loro punteggi tra i votanti: l'alternativa con la somma totale più grande è in cima, l'alternativa con la seconda somma totale più grande è la successiva, e così via.
Nel caso del vincitore di Borda, l'aggregazione delle preferenze è potenzialmente vulnerabile al causa del voto strategico e all'impostazione strategica dell'agenda di voto, rispetto al voto secondo le proprie preferenze.

*2.3.3 Il teorema di Gibbard-Satterthwaite*

Le preferenze sono ordinali e non comparabili tra loro: gli ordinamenti delle preferenze non contengono informazioni sulla forza delle preferenze di ciascun individuo o su come confrontare le preferenze di individui diversi tra loro. Le regole di aggregazione delle preferenze mappano profili di ordinamenti di preferenze individuali in relazioni di preferenze sociali. Partendo da una relazione di preferenze sociali, possiamo costruire le Regole di Scelta Sociale, il cui output è dato da una o più alternative vincenti. Formalmente, una Regola di Scelta Sociale, $f$, è una funzione che assegna ad ogni profilo $< R_1, R_2, \ldots, R_n >$ (in qualche dominio di profili ammissibili) un insieme di scelta sociale $f(R_1, R_2, \ldots, R_n) \subseteq X$.Una regola di scelta sociale $f$ può essere derivata da una regola di aggregazione delle preferenze $F$, definendo $f(R_1, R_2, \ldots, R_n) = \{x \in X: per\ tutti\ y \in X, xRy\}$ dove $R = F(f(R_1, R_2, \ldots, R_n))$. In generale non vale il contrario.

Il criterio del vincitore di Condorcet definisce una regola di scelta sociale, dove, per ogni profilo $< R_1, R_2, \dots, R_n >$, $f(R_1, R_2, \dots, R_n)$ contiene ogni alternativa in $X$ che vince o almeno pareggia con ogni altra alternativa nel voto a maggioranza a coppie. Come mostrato dal paradosso di *Condorcet*, questo può produrre un insieme di scelta vuoto. Al contrario, la regola del *Plurality* e il *vincitore di Borda* inducono regole di scelta sociale che producono sempre insiemi di scelta non vuoti. Soddisfano anche le seguenti condizioni di base (l'ultima per$|X| \geq 3$):

- *Dominio universale*: Il dominio di $f$ è l'insieme di tutti i profili logicamente possibili di ordinamenti di preferenze individuali completi e transitivi.
- *Non dittatura*: Non esiste un individuo $i \in N$ tale che, per tutti i possibili profili $< R_1, R_2, \dots, R_n >$ nel dominio di $f$ e tutti gli $x$ nel dominio di $f$, $yR_ix$ dove$y \in f(R_1, R_2, \dots, R_n)$.
- V*incolo sul range*: Il dominio di $f$ contiene almeno tre alternative distinte (e idealmente tutte le alternative in $X$).

Se integrate con un appropriato criterio di spareggio, le regole di Pluralità e Borda possono essere ulteriormente rese “risolute":
- *Decisività*: La regola di scelta sociale $f$ produce sempre un'unica alternativa vincente (un S*ingleton Choice Set*).

Scriviamo quindi $x = f(R_1, R_2, \dots, R_n)$ per indicare l'alternativa vincente per il profilo $< R_1, R_2, \dots, R_n >$.
Sorprendentemente, questa lista di condizioni è in conflitto con il seguente ulteriore requisito:
- *Strategy-proofness*: Non esiste un profilo $< R_1, R_2, \dots, R_n >$ nel dominio di $f$ per il quale $f$ sia manipolabile da qualche individuo $i \in N$. Cioè, c’è incentivo per gli individui a votare secondo le proprie preferenze.

La manipolabilità è così definita: se $i$ presenta un falso ordinamento di preferenze $R_i'(\neq R_i)$, il vincitore è un'alternativa $y'$che $i$ preferisce strettamente (secondo $R_i$) all'alternativa $y$ che vincerebbe se $i$ dichiarasse il vero ordinamento di preferenze $R_i$.

***Teorema (Gibbard 1973; Satterthwaite 1975):*** *Non esiste una regola di scelta sociale che soddisfi il dominio universale, la non dittatura, il vincolo sul range, la decisività e la Strategy-proofness.*

Questo risultato solleva importanti questioni sui compromessi tra i diversi requisiti di una regola di scelta sociale. Una dittatura, che sceglie sempre l'alternativa preferita dal dittatore, è banalmente *Strategy-proofness*. Il dittatore ovviamente non ha alcun incentivo a votare strategicamente, e nessun altro lo fa, poiché il risultato dipende solo dal dittatore.
Infine, riassumendo, con il voto all’unanimità l’insieme delle scelte può essere vuoto e l'ordinamento sociale può essere non completo; il voto a maggioranza può condurre a scelte collettive non transitive e, dunque, non razionali; la regola di Condorcet implica la violazione del criterio logico di transitività, ed è soggetta alla manipolabilità della classifica, oltreché alla vuotezza dell’insieme di scelta ottimale; il sistema di Borda è soggetto alle conseguenze del voto strategico e non soddisfa l’assioma dell’Indipendenze delle Alternative Irrilevanti del teorema di Arrow.

## SEZIONE 3: Elementi progettuali del laboratorio-esperimento di classe

### *3.1 Approccio Metodologico*

Le attività del corso sono state sviluppate con un approccio costruttivista (Harel e Papert 1991) dove gli artefatti tecnologici hanno svolto il ruolo di strumenti (Rabardel 2002). Le piattaforme informatiche utilizzate e i più innovativi software dedicati hanno svolto il ruolo di mediatori semiotici (Vigotsky 1987) veicolando, attraverso percorsi opportunamente strutturati, tematiche non presenti nei curricula scolastici in Italia. Dal punto di vista educativo e didattico, la Teoria delle Scelte acquista un valore significativo in quanto mediatore semiotico sia in chiave positiva, in quanto fornisce informazioni per comprendere determinate scelte, strategie e tattiche in situazioni di confronto o conflitto sia in modo prescrittivo per determinare come e quando interpretare l'interazione tra due o più soggetti e gli esiti che ne derivano.

Si è deciso di avvalersi della Metodologia del Gioco di Ruolo Simulato: è stato introdotto brevemente l'argomento, con l'aiuto dello storytelling. L'ambientazione scelta è stata quella di una corte medioevale, in cui la presenza del Re, dei cavalieri, saltimbanchi e taverne, gli studenti hanno fatto i conti con la razionalità. Gli studenti, che hanno interpretato il ruolo degli uomini più saggi dei due regni, sono stati chiamati a scegliere alternando la scelta ottima individuale (l'alternativa che preferivano maggiormente, secondo un criterio del tutto personale), alla scelta ottima sociale (ciò che sarebbe stato meglio per il bene dei due regni).
Sono stati selezionati obiettivi di apprendimento misurabili relativi all'esperimento, in particolare come si fanno le scelte individuali, come si aggregano le preferenze collettive, come la razionalità sia alla base delle scelte e come a volte possa essere ignorata.
Gli studenti si sono trovati di fronte a risultati che non sempre sono stati in grado di capire con facilità, a cui è seguita una spiegazione per mezzo della letteratura e dei modelli matematici sottostanti. Hanno osservato i dati raccolti e hanno cercato di spiegare le motivazioni dietro le scelte degli altri giocatori. Infine, hanno dovuto motivare le proprie scelte e quelle del gruppo a cui appartenevano.
Sono stati costruiti moduli online di decisione che hanno consentito di mantenere private le azioni degli studenti, così da non influenzare le loro scelte. Le dinamiche dell'apprendimento situato sulla sfida hanno fatto leva sull'approccio empatico ai contenuti affrontati e hanno predisposto gli studenti alla comprensione dei contenuti teorici successivamente sviluppati in modalità didattica di laboratorio.

*3.2 Attività svolte*

*Ordinamento delle preferenze e scelte individuali*

Le prime attività hanno riguardato un ordinamento delle preferenze su più alternative prima su caratteristiche **unimodali** e in seguito su alternative definite da più caratteristiche (**vettoriali**). In particolare, la prima attività proposta è stata un gioco di coordinamento su 4 alternative e il risultato, coerente con la letteratura, è che i giocatori riescono a coordinarsi sull'opzione saliente. La congettura di Michael Bacharach prevede che, *quando ogni alternativa è descritta in termini di un certo numero di caratteristiche, l'opzione saliente è quella che si distingue nella maggior parte delle caratteristiche*. Il secondo gioco, sempre di coordinamento, prevedeva la scelta tra diverse opzioni descritte da un vettore di caratteristiche. In questo caso, si dimostra che non è così facile coordinarsi per far confluire la scelta su un'unica opzione. In entrambi gli esperimenti, è stato possibile osservare una forte tendenza ad evitare sia l'opzione inferiore che l'alternativa che veniva ricevuta come quella più indistinta.

*Scelte collettive e metodo di voto*

Le attività successive si sono incentrate sulla costruzione di scelte collettive a partire dalle scelte individuali. Gli studenti hanno dovuto selezionare il cavaliere che fosse in grado di guidare l'esercito comune ai due Regni.
Ciascuna alternativa era definita da due caratteristiche costruite in modo tale che una fosse percepita come positiva e l'altra negativa, secondo il senso comune. Nel testo, al fine di non influenzare la scelta degli studenti, non sono state usate congiunzioni avversative (come ma, invece, etc.) che potessero far risaltare maggiormente uno dei due aspetti.

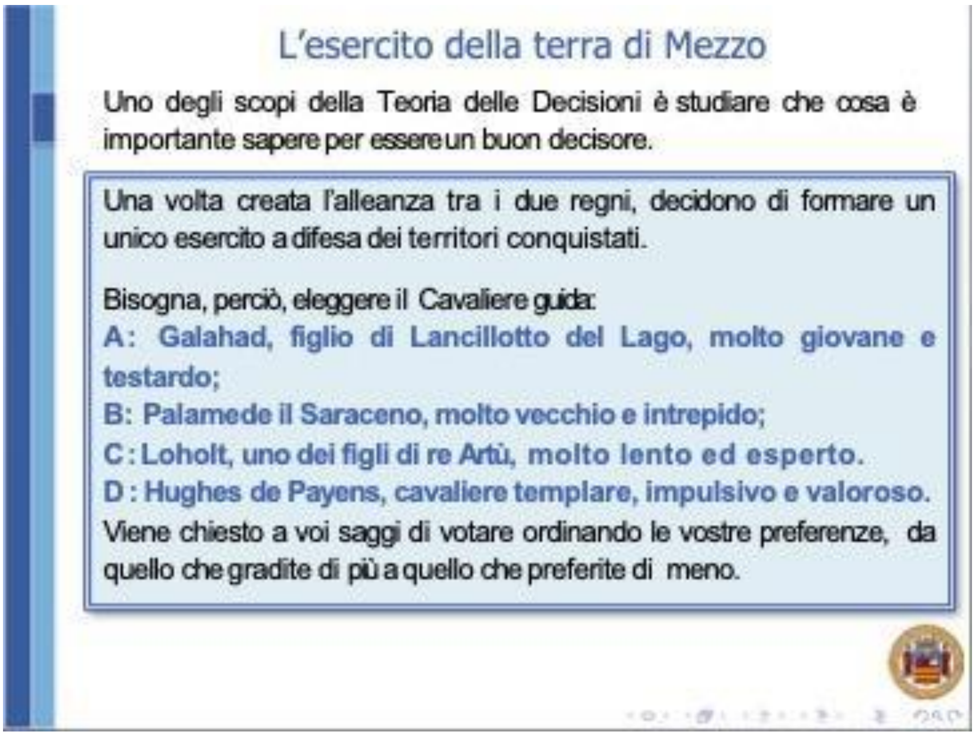
Sono stati creati dei moduli per mezzo dell'applicazione *Moodle* di Google per consentire agli studenti di giocare, e ad ogni alternativa (cavaliere) è stata associata un'immagine di riferimento, che rispecchiasse le caratteristiche dei cavalieri.

### *3.2.1 Plurality e Majority Rules*

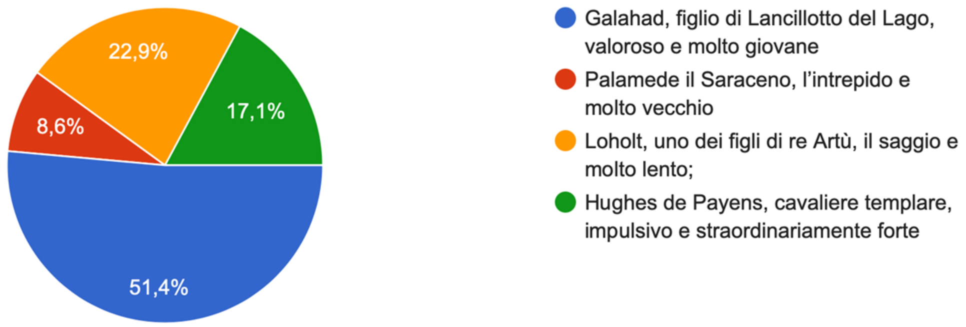
La prima attività, incentrata sul voto secondo le *Plurality* e *Majority Rules*, richiedeva che gli studenti scegliessero il Cavaliere che preferivano di più, selezionandolo in base alle caratteristiche evidenziate: *Galahad, figlio di Lancillotto del Lago, molto giovane e testardo; Palamede il Saraceno, molto vecchio e intrepido; Loholt, uno dei figli di re Artù, molto lento ed esperto; Hughes de Payens, cavaliere templare, impulsivo e valoroso.*
I nomi riprendevano quelli di alcuni personaggi delle storie e leggende dei cavalieri templari e della ben nota storia di Re Artù. Tra le alternative, sono stati inseriti candidati legati alle due figure più importanti della storia della Tavola Rotonda, per rendere il contesto più familiare e coinvolgente nell'immaginario degli studenti. Riteniamo che questa scelta abbia potuto in qualche modo condizionare le scelte, facendo identificare gli studenti con i personaggi, prediligendo le caratteristiche a loro più affini (giovinezza, saggezza).

*Il vincitore esiste sempre?*
Nella specifica attività di laboratorio è stato proclamato un vincitore, sia secondo la *Plurality* rule sia per la *Majority* rule. Dopo aver mostrato i risultati, è stata aperta una discussione sulle motivazioni che hanno indotto la scelta di ciascuno studente. Successivamente, agli studenti è stato chiesto se ritenessero che le preferenze fossero tra loro "confrontabili", facendo riferimento alla possibilità di ordinare elementi unidimensionali ed elementi definiti da un vettore di caratteristiche.
Il risultato delle scelte individuali e collettive, pertanto, è dipeso da quanto dell'input informativo "arricchito" dagli elementi inseriti per ciascuna alternativa gli studenti, singolarmente prima e in gruppo poi, hanno deciso di usare nel determinare l'ordinamento delle preferenze: formalmente, il risultato è dipeso dall'assunzione sulla misurabilità e comparabilità interpersonale delle scelte "ottime" degli agenti coinvolti.

Costruzione della funzione di scelta individuale - *Quale sarà il cavaliere che guiderà l'esercito della Terra di Mezzo?*



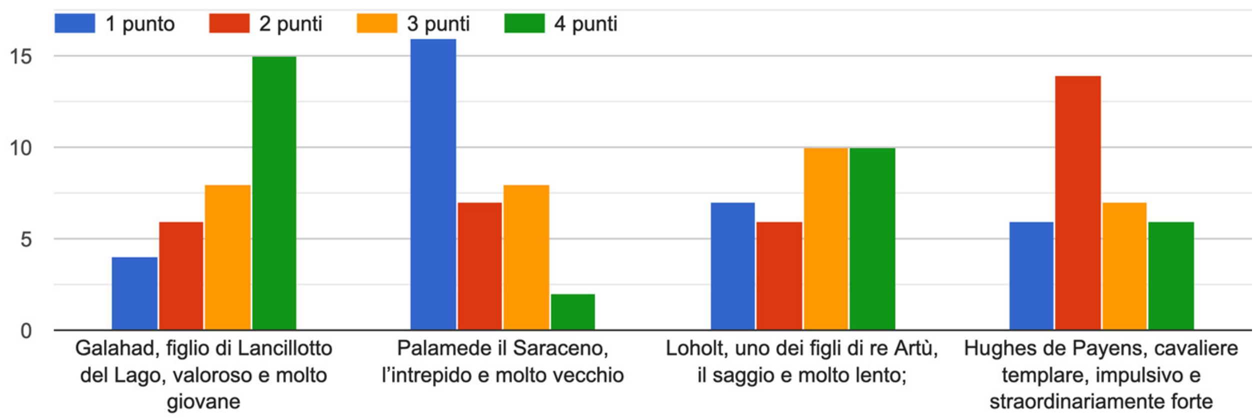
Attività 1 - Scelta individuale: *Quale dovrebbe essere secondo te il Cavaliere a capo dell'esercito dei due regni?*




*3.2.2 Vincitore di Borda*

Per introdurre il criterio di Borda, gli studenti hanno ordinato le proprie preferenze assegnando un punteggio decrescente alle quattro alternative.

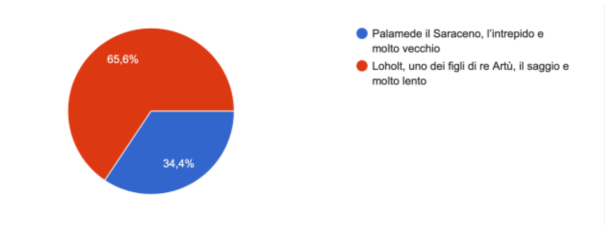
Attività 2 - Ordinamento delle preferenze individuali: *Ordina le tue preferenze, da quella che preferisci di più (4 punti) a quella che preferisci di meno (1 punto)*

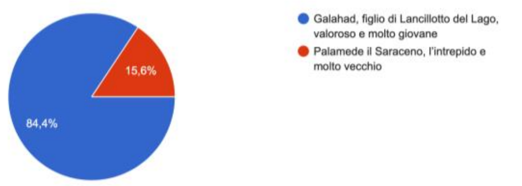


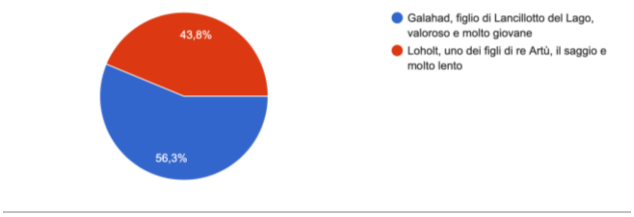

Il vincitore di Borda è risultato essere lo stesso delle votazioni con Plurality e Majority. Con gli studenti è stata discussa la possibilità che non ci fosse un vincitore di Borda e la manipolabilità del sistema di voto. Dopo aver osservato la distribuzione delle preferenze aggregate, gli studenti hanno provato a formulare ipotesi sul punteggio da assegnare in fase di votazione, al fine di riuscire ad indurre una scelta piuttosto che un'altra. Gli studenti hanno trovato molto interessante la possibilità di condizionamento del risultato di un voto; in maniera molto intuitiva, gli studenti hanno percepito come aggregazioni e accordi nella fase preliminare alla votazione, possano determinare un ordinamento falsato delle preferenze per favorire un candidato comune (Violazione della *Strategy-proofness condition*).

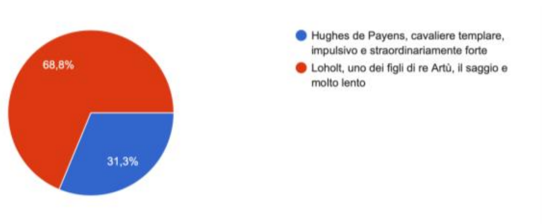
### *3.2.3 Vincitore di Condorcet*

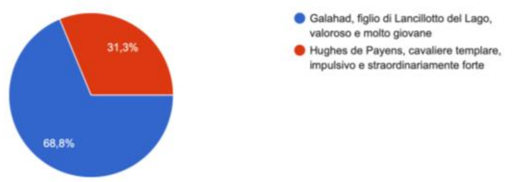
Per determinare il vincitore di Condorcet, è stato chiesto agli studenti di decidere il vincitore nel confronto a coppie.

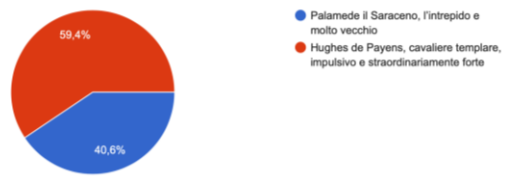


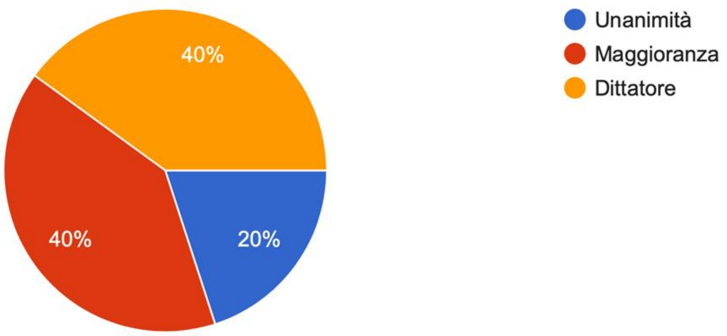




L'ordine delle coppie messe a votazione è stato randomizzato, per evitare ogni forma di coordinamento tra gli studenti e per minimizzare il rischio di votazione automatica per la prima alternativa presente. Dal confronto dei dati relativi all'ordinamento delle preferenze individuali e alle votazioni a coppie, non è emerso alcun risultato contrastante: gli studenti sono rimasti coerenti con il proprio ordinamento iniziale. Il vincitore di Condorcet, pertanto, è risultato essere lo stesso degli altri metodi di selezione.

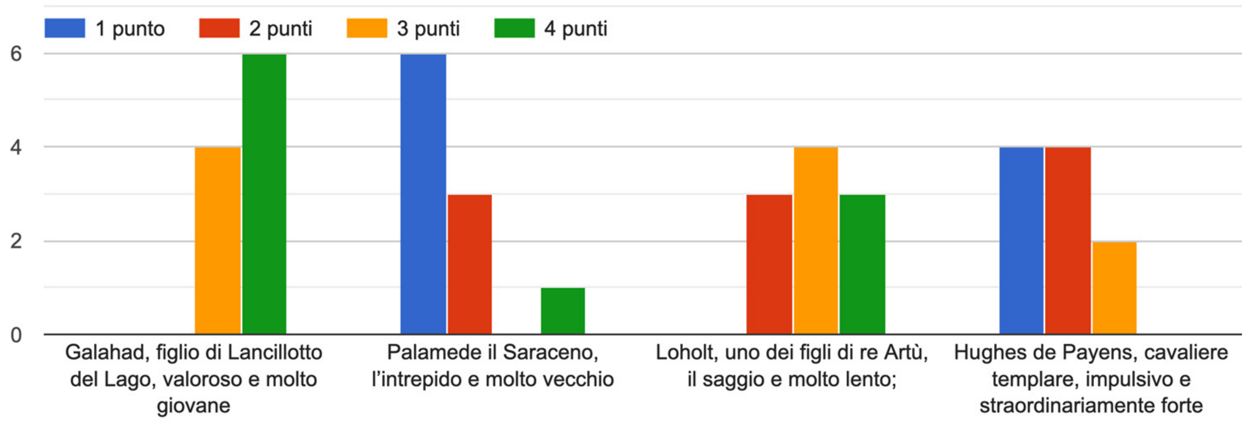
### *3.2.4 Preferenze collettive*

Nell'ultima attività, gli studenti hanno formato 10 coalizioni di 3-4 persone. Hanno dovuto dapprima stabilire una regola decisionale al proprio interno al fine di creare l'ordinamento delle preferenze collettive, sulla base delle preferenze individuali.

Attività 4 - Aggregazione delle preferenze individuali: *Come avete preso la decisione del gruppo: unanimità, maggioranza, dittatore, altro*




Attività 4 - Ordinamento delle preferenze collettive: *Ordinate le vostre preferenze, da quella che preferite di più (4 punti) a quella che preferite di meno (1 punto)*




Il risultato, sorprendente per gli studenti, è che nel 40% dei gruppi la decisione è stata presa in maniera dittatoriale. Gli studenti, che appartenevano ai gruppi dittatoriali, hanno motivato la decisione come frutto di un processo decisionale lungo, da cui, per uscirne, è emerso un dittatore che imponeva le proprie scelte. In realtà è facile riscontrare, in questo tipo di atteggiamento, il risultato ben noto del Teorema dell'Impossibilità di Arrow.
Il risultato della votazione secondo il metodo di Condorcet e di Borda ha avuto lo stesso vincitore.

**SEZIONE 4: La voce dei partecipanti**

Al termine dell'attività, gli studenti hanno risposto ad un questionario predisposto per il monitoraggio dell'efficacia della ricaduta didattica del laboratorio. Esso è in parte composto da risposte multiple con richiesta di esprimere la loro posizione o il loro giudizio su quanto richiesto nelle domande, in parte con quesiti aperti tesi a riscontrare dai commenti degli studenti la ricaduta del percorso svolto.

Inoltre, al termine dell'intero modulo di Matematica ed economia un questionario conclusivo è stato proposto a docenti e studenti.
Nel prosieguo del paragrafo vengono sintetizzate le evidenze emerse dalla lettura dei questionari compilati, in alcuni casi vengono richiamate soltanto le osservazioni più significative e pertinenti.

Prima di chiedere un'opinione o un giudizio sull'attività, agli studenti sono state avanzate richieste per testare le conoscenze antecedenti all'inizio del laboratorio ed è emerso che

- il 97,5% degli studenti sapeva poco o niente di che cos'è la Teoria delle scelte
- Il 59,5% degli studenti sapeva poco o niente di come si aggregano le scelte collettive, il 35% sapeva "abbastanza"
- il 32,5% degli studenti sapeva poco o niente che il metodo di scelta selezionato può influenzare l'esito delle votazioni, abbastanza il 47,5 %, molto 17,5%, moltissimo 2,5%.

Da questo primo quadro è emerso che gli studenti avevano poche o nulle informazioni sull'argomento dell'attività e che però avevano l'idea che le votazioni potessero essere "in qualche modo" influenzate. Non esprimevano però ipotesi sul "come" tale influenza potesse avvenire.

Sono state poi presentate alcune domande sul coinvolgimento al laboratorio e sulla ricaduta sul proprio percorso.

Alla domanda

"Tale esperienza è servita a te come persona?"

gli studenti hanno risposto poco per il 2,5%, abbastanza 47,5%, molto 50%

"Ti sei sentito coinvolto nell'esperienza?"

gli studenti hanno risposto abbastanza 7,5%, molto 72,5% il restante 20% si è sentito poco coinvolto.
È stato interessante notare che anche ragazzi che alle domande se il tema trattato fosse inerente alle scelte di studio future hanno risposto di no, hanno espresso interesse, partecipazione e giudizio fortemente positivo.

Poi sono state rivolte alcune domande aperte per ascoltare il punto di vista degli studenti.
alla domanda

"Che cosa ti ha colpito maggiormente dell'attività svolta in classe-virtuale?"

gli studenti hanno dato risposte che si possono raggruppare nelle seguenti categorie

- l'interazione in tempo reale con gli studenti tramite i vari giochi,
- il coinvolgimento costante,
- il lavoro di gruppo,
- la volontà da parte di professore di coinvolgere tutti nell'attività,
- le sessioni di confronto multigiocatore

Alla domanda

"Che cosa giudichi più utile dell'attività svolta?"

gli studenti hanno dato risposte che si possono raggruppare nelle seguenti categorie

- la preparazione dei docenti e la scelta dell'eccellente modo in cui gli insegnanti hanno coinvolto noi allievi nelle risposte interattive
- la possibilità di giocare e interagire con gli altri ragazzi
- il coinvolgimento dei ragazzi tramite giochi e quiz
- i giochi collettivi
- la collettività
- i giochi svolti con i moduli
- mi ha colpito molto la tematica della probabilità e della logica

- il modo per influenzare il metodo delle votazioni e le aste
- l'applicabilità delle teorie
- i consigli o le intuizioni avute circa il modo in cui il singolo è in grado di influenzare il risultato finale
- Il fatto che mi abbia fatto ragionare su situazioni non comuni ma che possono comunque accadere
- Il fatto di fare esercizi per aiutare a capire meglio le varie spiegazioni
- L'applicazione nella vita reale
- L'applicazione pratica dei concetti matematici trattati
- la parte pratica
- la parte relativa all'attualità
- le attività come esempi

e alla domanda

"Hai qualche osservazione sulle attività svolte nel Laboratorio di Teoria dei Giochi"

- Bello
- Ottimo
- Molto interessanti
- Le attività svolte nel Laboratorio di Teoria dei Giochi sono molto interessanti e formative.
- sarà utile per capire l'applicazione nella vita reale
- Tutte molto interessanti che sicuramente hanno aiutato a sviluppare nuove abilità e potenzialità.
- una bella esperienza che ripeterei se potessi
- Attività molto interessanti e importanti
- A mio parere, è stato tutto ben organizzato e interessante
- Sono belli, ma ci abbiamo messo tanto tempo
- molto interessanti e coinvolgenti
- È giusto pensare a fare sempre la migliore scelta razionale possibile, però non penso porti sempre al migliore risultato, ci sarebbero altre variabili non considerate.
- Interessanti e formative
- Intrattenenti e utili a capire l'argomento.
- Molto divertenti
- lezione molto coinvolgente, docenti molto flessibili e chiari durante le spiegazioni
- è stato un corso molto interessante che ha contribuito ad aumentare il mio interesse per le discipline scientifiche
- Troppe ore di seguito
- Bel corso pur se lungo
- Non ho osservazioni

"che cosa cambieresti del laboratorio per il futuro?"

- Non cambierei nulla, il laboratorio è già perfetto
- non cambierei niente, ovviamente avrei preferito svolgere le attività in presenza
- nulla, la parte teorica e pratica sono ben equilibrate
- Nessuna variazione in merito
- Non credo ci sia qualcosa da cambiare
- niente
- Non ritengo che qualcosa debba essere cambiato
- sarebbe più coinvolgente in presenza
- che tutti i partecipanti siano attivi e rapidi a giocare
- velocità dei giochi
- canali per i giochi interattivi più efficienti

Dalle risposte alle tre domande “cosa ti ha colpito”, “cosa giudichi utile”, “qualche osservazione” (domanda più generica per permettere allo studente di esprimere il proprio pensiero magari non catalogabile con le altre domande presentate) sono emersi indicatori comuni sull’attività, infatti gli studenti

- ➔ si sono sentiti coinvolti, interessati ed hanno percepito l’attenzione dei docenti nei loro confronti
- ➔ hanno trovato utile trattare di temi di stretta attualità ed affrontare continui rimandi ai vari contesti reali
- ➔ hanno gradito particolarmente la possibilità di lavorare in gruppo ed in tempo reale attraverso le tecnologie.

Alla domanda in cui si chiedono suggerimenti per eventuali modifiche del corso i ragazzi hanno espresso tre indicazioni chiare:

- il corso è piaciuto così come è stato proposto
- hanno lamentato talvolta la lentezza del gioco interattivo (ma ciò è dovuto alle connessioni ed alle piattaforme utilizzate)
- la richiesta di una preferibile attività in presenza è emersa da solo due studenti.

Quest'ultimo punto è interessante perché dimostra come i ragazzi abbiamo accettato in maniera “naturale” il passaggio alle attività in piattaforma. Alla richiesta specifica di valutare la scelta di svolgere l’attività online a causa della chiusura delle scuole (ovvero di non procrastinare le attività), il 75,5% ha apprezzato molto/abbastanza di fare attività online, il 16,5% ha apprezzato poco, l’8% per niente.

Alla domanda relativa al gradimento del percorso svolto, il 95% degli studenti ha apprezzato molto /moltissimo l’attività del laboratorio, il restante 5% “abbastanza” e alla richiesta di attribuire un voto da 1 a 5, il 41% ha dato 5 (ottimo), 54% ha votato 4 (buono) e il 5% ha dato 3 (soddisfacente). Nessuno ha votato 2 (scarso) o 1 (nullo).

Anche i docenti sono stati coinvolti nell'attività di monitoraggio ed hanno evidenziato che il corso era organizzato per consentire a tutti gli studenti di partecipare pienamente, con un carico di lavoro appropriato, è risultato evidente l’interesse mostrato per l’argomento trattato e la collaborazione tra docenti e tra docenti e studenti. Tutti i docenti rifarebbero questa esperienza che hanno riscontrato avere come punti di forza:

- immediatezza e coinvolgimento
- rapidità con cui è arrivata a tutti contemporaneamente
- l’aspetto pratico e non solo teorico
- lo stimolo continuo a mettersi in gioco

e come punti di debolezza:

- il periodo di svolgimento (il mese di maggio è stato scelto dalle scuole)
- la difficoltà di catturare l’attenzione dopo tante ore di computer
- la possibilità di non poter effettivamente tenere “sotto controllo” tutti i presenti.

I professori hanno evidenziato gli stessi punti di forza evidenziati dagli studenti ed hanno sottolineato i punti di debolezza che sono caratteristici di tutte le attività didattiche svolte a distanza dietro lo schermo di un computer.

**SEZIONE 5: Conclusioni**

La Teoria delle Decisioni ha posto gli studenti di fronte a diverse questioni:

- Cosa deve fare un buon decisore?
- In che modo si può scegliere un'alternativa, tenendo conto di tutti i soggetti coinvolti?
- Perché il vincitore non sempre esiste?

Gli studenti hanno scardinato una serie di convinzioni proprie delle scienze esatte che, quando applicate alle Scienze Sociali, conducono a risultati non facilmente motivabili. In particolare, gli studenti hanno dovuto "accettare" che può non esserci un'unica soluzione ad un problema e che, a volte, la soluzione non esiste. Mentre il Plurality e il Majority sono regole di scelta collettiva con le quali gli studenti hanno già avuto confidenza (elezioni dei rappresentanti di classe, elezioni politiche, ma anche semplici decisioni di vita quotidiana prese all'interno di un gruppo), i metodi di Condorcet e di Borda non erano mai stati affrontati. Gli studenti si sono mostrati molto incuriositi dai presupposti teorici e i risultati ammissibili, animando le lezioni con ampie discussioni sull'argomento.
Da un'analisi dei dati delle attività proposte, possiamo anche dedurre che le diverse modalità di votazione non hanno influenzato l'ordinamento individuale delle preferenze che è stato, invece, determinato in buona parte dalle caratteristiche peculiari di ciascuna alternativa e dall'inclinazione di ciascuno studente. Gli studenti, infatti, hanno costruito le proprie scelte, ponderando di volta in volta le caratteristiche positive e negative delle quattro alternative.
Osservando i feedback ottenuti dai questionari che gli studenti hanno compilato, è emerso che le scelte laboratoriali sono state molto apprezzate, che i ragazzi si sono sentiti parte attiva e protagonisti delle attività e hanno percepito di partecipare ad un'attività laboratoriale di gruppo nonostante la freddezza di uno schermo del computer e la distanza dello studio da remoto. La strategia di non prevedere una valutazione ha consentito maggior libertà di espressione dei ragazzi che non si sono mai sentiti giudicati che hanno partecipato con grande interesse alla predisposizione di un lavoro multimediale consuntivo del modulo di Teoria dei Giochi (non sul tema oggetto del presente lavoro).
Dal punto di vista dei docenti si è avuto lo stesso grado di collaborazione ed interesse, le perplessità legate all'attività online sono legate ai limiti della didattica a distanza, come già detto nel paragrafo precedente.
Il percorso didattico sarà certamente replicato in futuro e, vista l'efficacia dell'uso delle tecnologie (moduli per rispondere ai quesiti proposti con analisi dati in tempo reale, siti per simulare votazioni, aste e più in generale giochi economici si a carattere singolo che collettivo), anche quando la scuola tornerà in presenza i problemi proposti e le analisi dei dati verranno riproposti come nell'attività descritta.

**Bibliografia**


1. Arrow, Kenneth (1951). Social Choice and Individual Values. 2nd ed. 1963. Wiley, New York.
2. Ball, Sheryl B., Catherine C. Eckel and Christian Rojas (2006). "Technology Improves Learning in Large Principles of Economics Classes: Using Our WITS." American Economic Review Papers and Proceedings, 96(2): 442-446.
3. Bardsley, N., Mehta, J., Starmer, C., & Sugden, R. (2010). Explaining focal points: Cognitive hierarchy theory versus team reasoning. *The Economic Journal*, *120*(543), 40-79.
4. Becker, William E., and Michael Watts, eds. (1998) Teaching Economics to Undergraduates: Alternatives to Chalk and Talk, Northampton, Mass.: Edward Elgar.
5. 5. Bimonte, G., Tortoriello, F. S., & Veronesi, I. (2023). An interdisciplinary educational path to understand the economic phenomena of a fluid and complex world with mathematics. Soft Computing, 1-11
6. Bimonte G., Tortoriello S.F., Veronesi I., (2022). Game Theory Lab: A Gamification Laboratory for High School Students, Handbook of Research on International Approaches and Practices for Gamifying Mathematics, DOI: 10.4018/978-1-7998-9660-9

7. Bimonte G., Tortoriello F.S., Veronesi I., (2021). A topological approach to Game Theory, Proceedings 14th International Congress on Mathematical Education Shanghai, 11st-18th July 2021.
8. Bimonte G., Tortoriello F.S., Veronesi I., (2021). Economics and mathematics: a transdisciplinary path using geodynamical models and computational software, Proceedings of INTED2021 Conference, 9128-9131 8th-9th March 2021, ISBN: 978-84-09-27666-0
9. Bimonte G., Tortoriello F.S., Veronesi I., (2020). Liceo Matematico - un percorso transdisciplinare per interpretare la realtà: il "role playing" per sviluppare dinamiche risolutive con l'uso delle nuove tecnologie, Didattica della matematica, disciplina scientifica per una scuola efficace, Pitagora Editrice Bologna, ISBN 88-371-2126-6
10. Bimonte G., Tortoriello F.S., Veronesi I., (2020). Game theory and mathematics: transdisciplinary skills to read into reality (a training course for in-service teachers), Proceedings 13th International Conference of Education, Research and Innovation, 4963-4967, Seville Spain, 9th-10th-November.
11. Bimonte, G., Tortoriello, F.S., Veronesi I.,(2021) Teaching Decision Theory in classroom experiments with the use of technologies, ICERI 2021 Proceedings 14th International Conference of Education, Research and Innovation, 8-9 November 2021 online, ISBN: 978-84-09-34549-6 / ISSN: 2340-1095, doi: 10.21125/iceri.2021
12. Capra, C. Monica, and Charles A. Holt (1999) "Coordination," Southern Economic Journal, 65:3 (January), 630-636.
13. Dardanoni, Valentino (2002). "A pedagogical proof of Arrow's impossibility theorem". Social Choice and Welfare.
14. Durham, Y., McKinnon, T., and Schulman, C. (2006). "Classroom Experiments: Not Just Fun and Games," Economic Inquiry, 45(1): 162-178.
15. Emerson, Tisha LN, and Beck A. Taylor. "Do Classroom Experiments Affect the Number of Economics Enrollments and Majors? A Study of Students in the United States." International Review of Economics Education 9.2 (2010): 43-58.
16. Gibbard, Allan (1973). "Manipulation of voting schemes". Econometrica, (41):587–601.
17. Grobelnik, Marko, Vesna Prasnikar, and Charles A. Holt (1999) "Classroom Games: Strategic Interaction on the Internet," Journal of Economic Perspectives, 13:2 (Spring), 211-220.
18. Harel, I.E., e S.E. Papert. (1991). Constructionism. Ablex Publishing.
19. Holt, Charles A., and Tanga McDaniel. 1998. Experimental economics in the classroom. In Teaching undergraduate economics, edited by William B. Walstad and Phillip Saunders. Boston:Irwin/McGraw-Hill, pp. 257-268.
20. Holt, C. (2007). Markets, Games and Strategic Behavior. Pearson Education.
21. Rabardel, P. (2002). People and Technology - A Cognitive Approach to Contemporary Instruments.
22. Sulock, Joseph M. (1990) "The Free Rider and Voting Paradox `Games'," Journal of Economic Education, 21:1 (Winter), 65-69.
23. Satterthwaite, Mark Allen (1975). "Strategy-proofness and Arrow's conditions: existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions". Journal of Economic Theory, (10):187–217.
24. Sen, Amartya Kumar (1970). Individual choice and Social Welfare. Holden-Day, San Francisco
25. Sen, Amartya Kumar (1986). Scelta, benessere ed equità. Il Mulino, Bologna.
26. Tortoriello F.S., Veronesi I. (2021). Internet of things to protect the environment: a technological transdisciplinary project to develop mathematics with ethical effects, *Soft Computing* 25, 8159–8168.
27. Vigotsky, L. (1987). Mind in society: The development of higher psychological processes. Harvard University Press.

**ALLEGATO 1 - ESEMPIO DI ATTIVITÀ DIDATTICA:**

**Scheda Scelte individuali e scelte collettive**
L'attività didattica consiste nella costruzione dell'ordinamento delle preferenze individuali, in presenza di alternative contraddistinte da più caratteristiche (preferenze multimodali).

Gli studenti sono i protagonisti delle avventure in un mondo fantastico e per introdurre l'argomento "scelte individuali e scelte collettive" si presenta loro la necessità di eleggere il Cavaliere alla guida dell'esercito.
Viene presentata la seguente slide e viene fornito il link per procedere alla votazione così da avere i risultati immediatamente per poter proiettare a schermo e discutere.


Il risultato delle scelte (individuali e collettive) dipende da come l'input informativo viene "arricchito" di elementi per ciascuna alternativa possibile. Ciascuna alternativa (cavaliere) presenta due caratteristiche che influenzano la scelta dei decisori e che vengono interpretate da ogni giocatore in maniera soggettiva. Sebbene ogni caratteristica nel linguaggio comune abbia un'accezione ben definita, in coppia con un altro elemento caratterizzante diventano l'una percepita come mediamente positiva, e l'altra come mediamente negativa.
In questo modo ciascuno studente dovrà costruire il proprio ordinamento riuscendo ad analizzare le caratteristiche che ritiene significative per vincere le elezioni.
La componente soggettiva determina l'ordinamento, in questo modo possiamo introdurre il concetto di ordinamento non completo.
Si possono analizzare

- le proprietà dell'ordinamento
  - riflessività,
  - transitività,
  - antisimmetria,
- la proprietà di indipendenza dalle alternative irrilevanti.

Con la costruzione delle scelte collettive viene mostrato il Teorema di impossibilità di Arrow.

Al termine della votazione, si analizzano i criteri di scelta:

- maggioranza semplice,
- maggioranza assoluta,
- vincitore di Condorcet
- vincitore di Borda.

Per ognuno di essi si apre una discussione in cui gli studenti raccontano come sono giunti al proprio ordinamento, confrontandosi con i criteri adottati dagli altri. Quello che emerge è la difficoltà di aggregare le preferenze individuali per giungere ad una scelta collettiva.