# L’interpretazione delle informazioni visuali in Matematica

**Pier Luigi Ferrari**
Università del Piemonte Orientale

pierluigi.ferrari@uniupo.it

**Sommario.** Questo lavoro affronta il tema delle difficoltà degli studenti in matematica nel passaggio da secondaria a università, con particolare riguardo all’interpretazione delle immagini. Si cerca di spiegare l’apparente contraddizione tra una convinzione diffusa e la realtà. La convinzione diffusa sostiene che la presenza di immagini nella comunicazione matematica è gradita agli studenti e favorisce la comprensione. La realtà sembra indicarci le crescenti difficoltà delle matricole nell’interpretazione di dati basati su immagini. Nel contributo vengono discussi alcuni esempi di difficoltà e ne viene proposta un’interpretazione che tiene conto sia dei risultati della linguistica funzionale, sia della teoria dei concetti figurali di Fischbein.

**Abstract.** This work addresses the issue of students' difficulties in mathematics in the transition from secondary to university, with particular regard to the interpretation of images. An attempt is made to explain the apparent contradiction between a widespread belief and reality. The widespread belief holds that the occurrence of images in mathematical communication is welcome to students and promotes their understanding. Reality provides us data that seem to indicate the growing difficulties of freshman students in interpreting visual data. The contribution discusses some examples of difficulty and an interpretation is proposed that takes into account both the results of functional linguistics and Fischbein's theory of figural concepts.

## 1. Introduzione

Le difficoltà in matematica degli studenti nel passaggio da secondaria a università è un tema che suscita un interesse crescente. Le difficoltà specifiche di questo passaggio possono dipendere da aspetti metacognitivi (che riguardano la gestione del proprio apprendimento e delle verifiche), aspetti non cognitivi (i sistemi di convinzioni circa la matematica e il suo apprendimento, o le emozioni che essa suscita), aspetti linguistici (la comprensione e produzione di testi multimodali), aspetti legati a conoscenze e abilità specifiche (quantità di tempo e impegno richiesti per passaggi che potrebbero essere automatici). In questo contributo mi occupo soprattutto delle difficoltà legate all’interpretazione e uso delle immagini.

Il ruolo delle immagini in educazione matematica è un nodo non ancora risolto e nemmeno affrontato sistematicamente. Da un lato è convinzione comune che esse giochino un ruolo sempre più ampio nella comunicazione e nell’apprendimento, e che i giovani preferiscano testi ricchi di immagini. Qualche volta si arriva a sostenere che ‘un’immagine vale più di cento parole’. D’altro canto, l’esperienza di insegnamento indica che l’interpretazione e l’uso di immagini in contesto matematico presenta difficoltà crescenti per un gran numero di studenti. Queste due posizioni sono in stridente e non ancora risolta contraddizione.

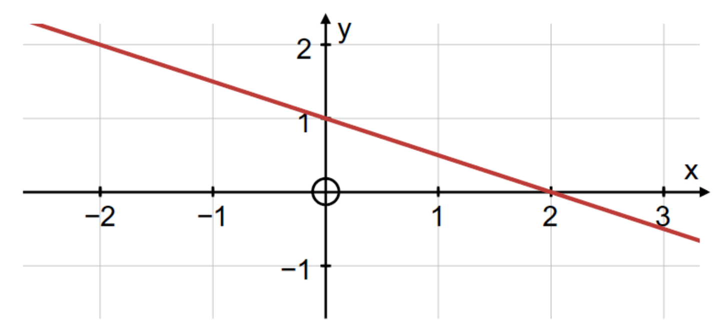
Le difficoltà riguardano sia gli aspetti strettamente figurali, sia le interazioni tra immagini, formule e testi verbali. In questo lavoro discuto alcuni esempi di problemi, che mettono in gioco immagini di tipo diverso, assegnati all’inizio di corsi universitari di area scientifica, insieme ai risultati sperimentali. Successivamente cerco di dare una spiegazione di questi fenomeni basandomi su alcune idee della linguistica pragmatica[1] che sono compatibili con la teoria dei concetti figurali di Fischbein (1993)[2].

Partiamo da qualche esempio.

*1.1 Il grafico della retta*

Problema 1

Considera la retta r rappresentata sotto. Una delle equazioni elencate corrisponde alla retta. Quale?




Scegli un’alternativa:

- ○ $x+2y-2=0$
- ○ $x-y+1=0$
- ○ $x+y-2=0$
- ○ $2x+2y-1=0$
- ○ $2x+y-2=0$

Problemi di questo tipo sono stati assegnati nelle prove di valutazione delle competenze iniziali per diversi corsi di area scientifica dell’Università del Piemonte Orientale dal 2017 al 2019, complessivamente a oltre 2000 matricole. Le percentuali di risposte corrette hanno oscillato tra il 38% e il 50%, e solo in un caso sono arrivate al 52%. In tutte le varianti il distrattore di gran lunga più popolare è stato quello in cui i coefficienti della x e della y erano scambiati. Questo, nel caso illustrato, corrisponde alla quinta scelta.

Essendo un problema a scelta multipla, gli studenti dovevano solo riconoscere l’equazione appropriata e potevano farlo o attraverso la costruzione dell’equazione partendo da punti letti sul grafico, oppure per esclusione, provando a sostituire nelle equazioni le coordinate di punti che stanno sulla retta. Nel caso illustrato, ad esempio, la sostituzione di 0 per x e 1 per y consente di escludere le ultime tre equazioni, mentre sostituendo 2 per x e 0 per y si esclude la seconda.

*1.2 Il piano cartesiano*

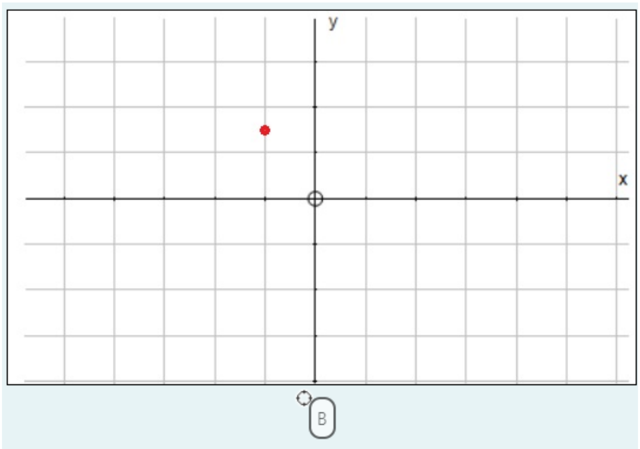
Anche il problema che segue e le varianti riportate di seguito sono stati assegnati in più edizioni della prova di valutazione delle competenze iniziali di cui sopra, a più di 3000 matricole.

[1] Alcune idee della pragmatica e della linguistica funzionale sono state applicate alla matematica da Ferrari (2021).

[2] A questo proposito si vedano anche i contributi di Sbaragli (2006) e Mariotti (2015).

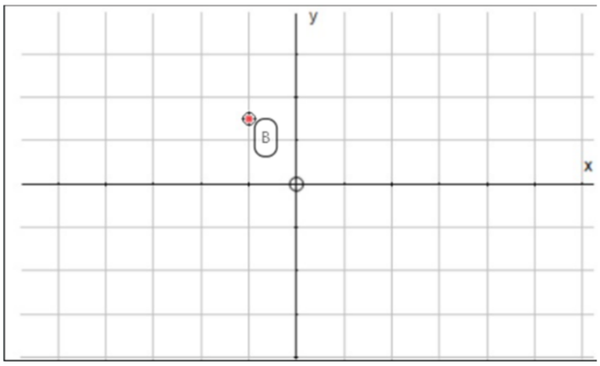
Problema 2.1

Nel diagramma è rappresentato il punto di coordinate *(x;y)*. Trascina l'etichetta B (che si trova in basso) in modo che corrisponda (col suo circolino in alto a sinistra) al punto di coordinate *(−x; y)*.

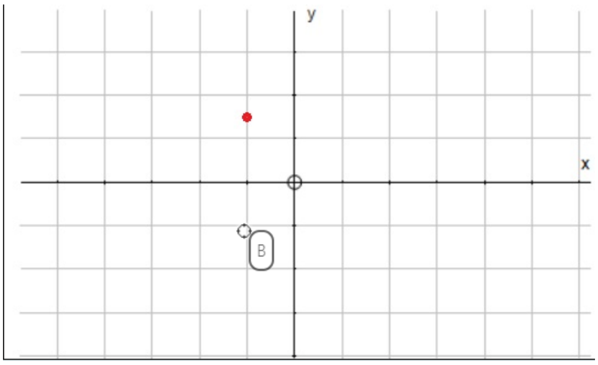



Questa variante ha avuto percentuali di successo relativamente alte, tra il 60% e il 70%. Vediamo qualche esempio di risposta sbagliata.

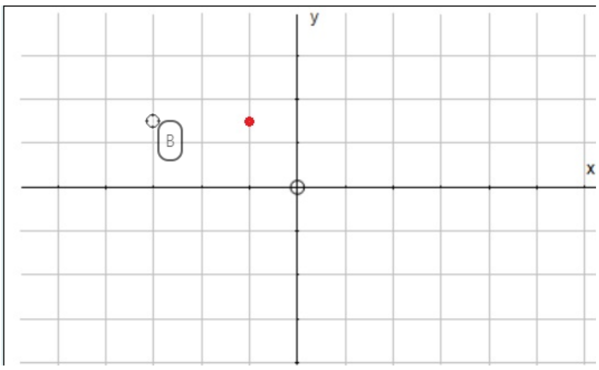
A



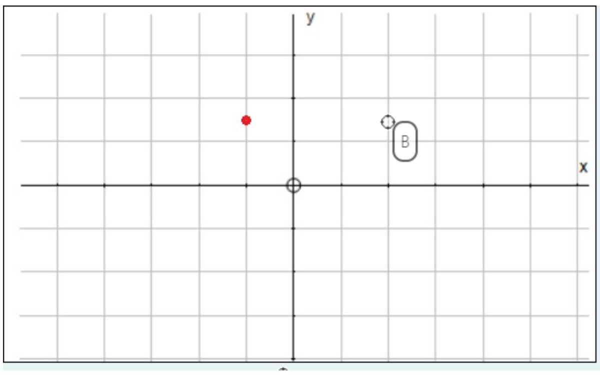

B




C



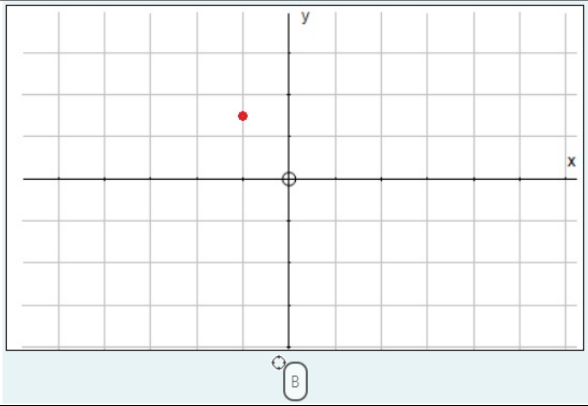

D



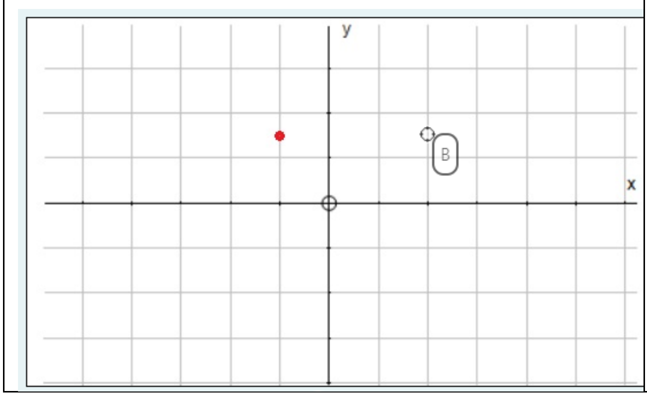
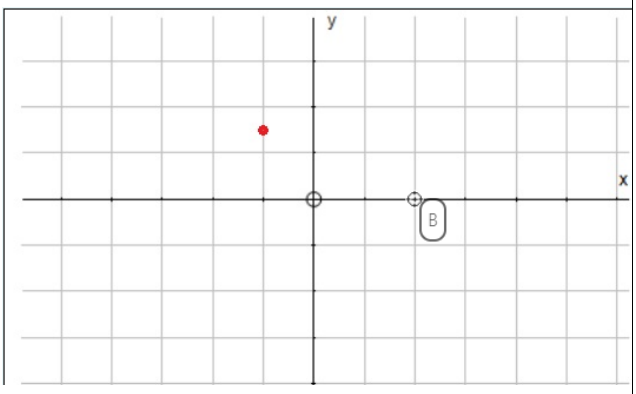

Nella maggior parte delle risposte sbagliate il punto è collocato nel semipiano delle x negative. Tra gli esempi presentati, nella A il punto è lasciato invariato mentre nella C è nettamente spostato a sinistra. In questi casi sembra esserci una grossa difficoltà ad accettare che il valore −x possa essere positivo. Nella B è stata lasciata invariata l'ascissa mentre è stato cambiato il segno dell'ordinata (in modo impreciso). Nella D il punto è stato collocato nel quadrante appropriato ma in posizione sbagliata.

Vediamo qualche altra variante.

Problema 2.2

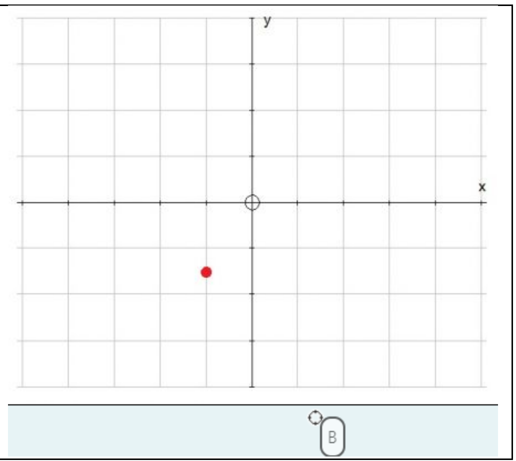
| | |
|---|---|
| Nel diagramma è rappresentato il punto di coordinate (x; y). Trascina l’etichetta B (che si trova in basso) in modo che corrisponda (col suo circolino in alto a sinistra) al punto di coordinate (2x; y). |  |

Questa variante (che non prevedeva cambiamenti di segno) ha avuto percentuali di successo tra il 40% e il 50%. Vediamo sotto le due risposte sbagliate più popolari.

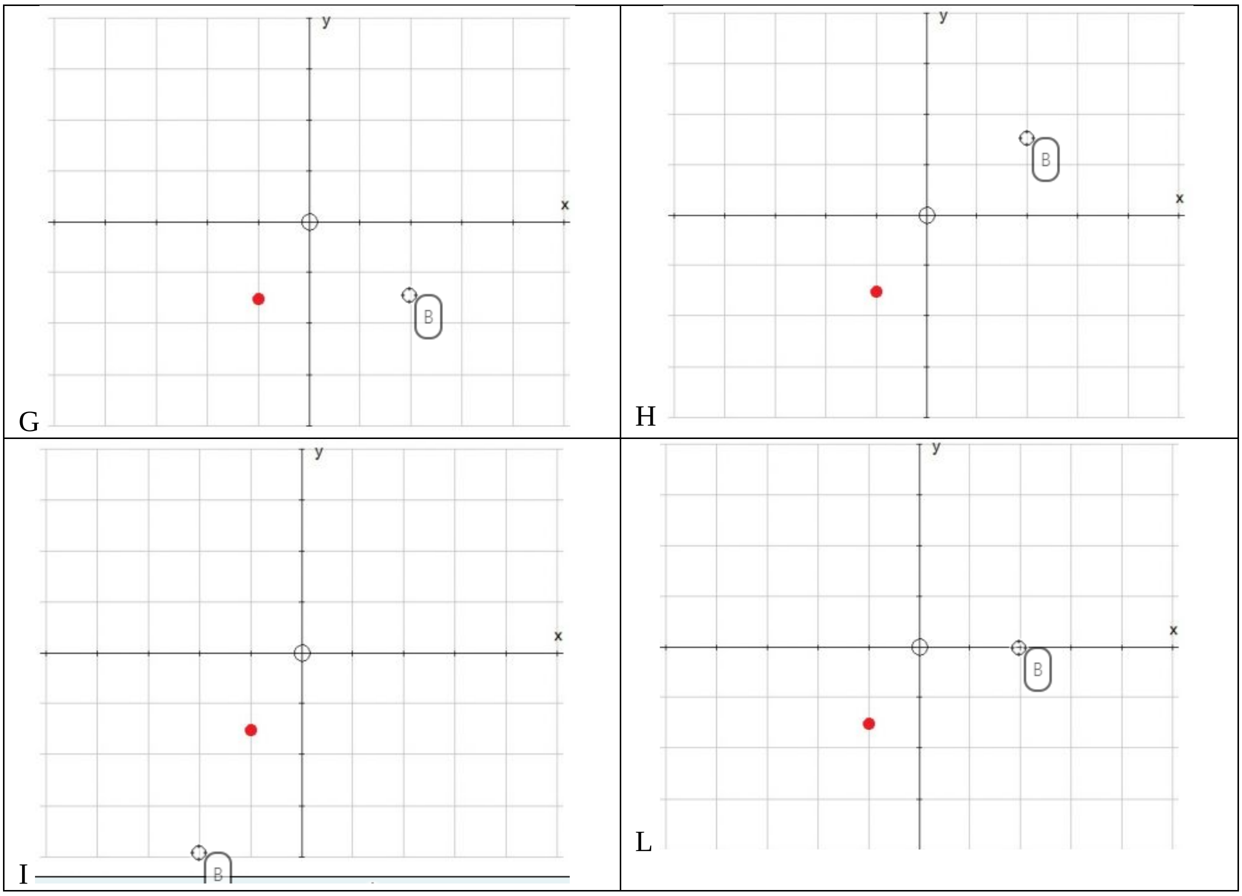
| E | F |
|---|---|
|  |  |

Nelle risposte E ed F l’ascissa del punto trasformato è |2x| invece che 2x. Nel caso di E l’ordinata è appropriata, mentre in F diventa 0.

Problema 2.3

| | |
|---|---|
| Nel diagramma è rappresentato il punto di coordinate *(x;y)*. Trascina l’etichetta B (che si trova in basso) in modo che corrisponda (col suo circolino in alto a sinistra) al punto di coordinate *(2x; −y)*. |  |

Questa variante ha avuto percentuali di successo tra il 35% e il 45%. Vediamo sotto le risposte sbagliate più popolari.




Qui abbiamo la risposta G che propone il punto di coordinate (−2x; y), cioè un punto con ascissa positiva e ordinata negativa, come se il segno di tali numeri fosse determinato dalla presenza o dall'assenza del segno '−' davanti. Nelle risposte H e I una delle coordinate (rispettivamente la y e la x) è determinata correttamente mentre l'altra ha il segno sbagliato (nel caso di I è sbagliato anche il valore assoluto della y). Nella L abbiamo l'errore di segno per la x e il valore 0 per la y. Il posizionamento del punto richiesto su uno degli assi coordinati è una delle scelte più frequenti nelle risposte sbagliate a tutte le varianti di questo problema.

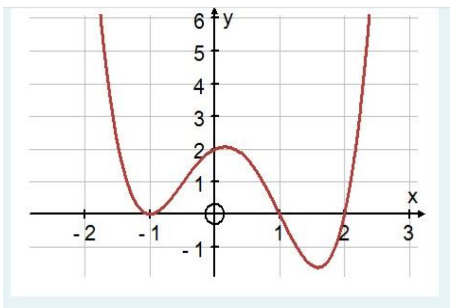
Vediamo un diverso esempio.

*1.3. Leggere i grafici*

Problema 3.1

Considera il grafico della funzione *f* riportato a destra. Tra le relazioni elencate sotto indica tutte e sole quelle verificate da *f*.
Scegli una o più alternative.

- $f(0) = 0$
- $f(0) > f(2)$
- $f(1) < f(2) + 1$
- $f(1) = f(0)$
- $f(-1) = -1$



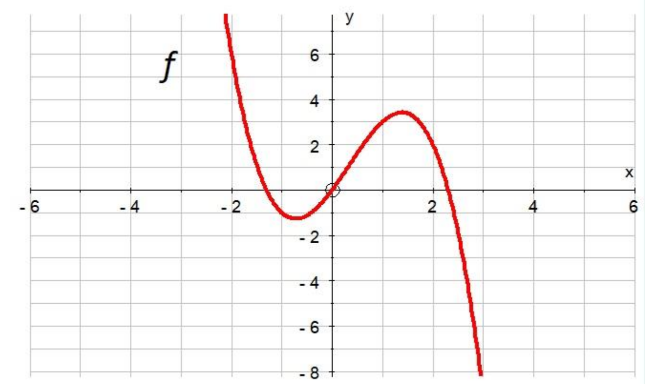
Qui gli studenti ricevevano 0,25 punti per ogni scelta corretta (cioè la seconda o la terza opzione) e una penalità di 0,17 per ogni scelta sbagliata. Quindi, ad esempio, chi sceglieva soltanto le due opzioni corrette prendeva 0,5 punti, che ne sceglieva due corrette e una sbagliata prendeva 0,33, chi ne sceglieva una corretta e una sbagliata prendeva 0,08. Non era comunque prevista la possibilità di punteggi negativi, quindi chi metteva, a esempio, solo risposte sbagliate, oppure una corretta e due sbagliate prendeva 0. Su un campione di circa 500 partecipanti il punteggio medio è risultato 0,23. Qui c’è stato un certo equilibrio fra i tre distrattori [$f(0) = 0$; $f(-1) = -1$; $f(1) = f(0)$]. In effetti corrispondono tutti a relazioni vere se si trascura una occorrenza della ‘*f*’.

Vediamo un’altra variante.

Problema 3.2

Considera il grafico della funzione *f* riportato a destra. Tra le relazioni elecate sotto indica tutte e sole quelle verificate da *f*.
Scegli una o più alternative.

- $f(1) < 2$
- $f(-2) < f(2)$
- $f(-2) > 1$
- $f(0) < f(-2)$
- $f(1) > f(2)$



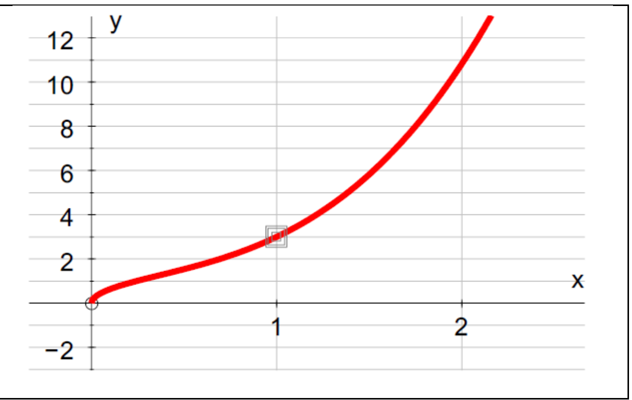

In questa variante il punteggio medio è risultato 0,22. Qui le opzioni corrette erano tre (la terza, la quarta e la quinta) e la distribuzione dei punteggi e delle penalità era adattata a questa configurazione. Anche qui solo pochi studenti indicano tutte le opzioni corrette. Il distrattore preferito è di gran lunga il secondo [$f(-2) < f(2)$].

*1.4. Descrivere i grafici*

Consideriamo i seguenti problemi, assegnati a un gruppo di matricole di Scienze Biologiche in una prova scritta.

Problema 4

Considera $f(x)=x^3+2\sqrt{x}$. Spiega perché $x=1$ non può essere un punto di massimo per *f*.




Lo scopo del problema 4 era verificare la capacità di usare la lingua per argomentare in situazioni matematicamente molto semplici.

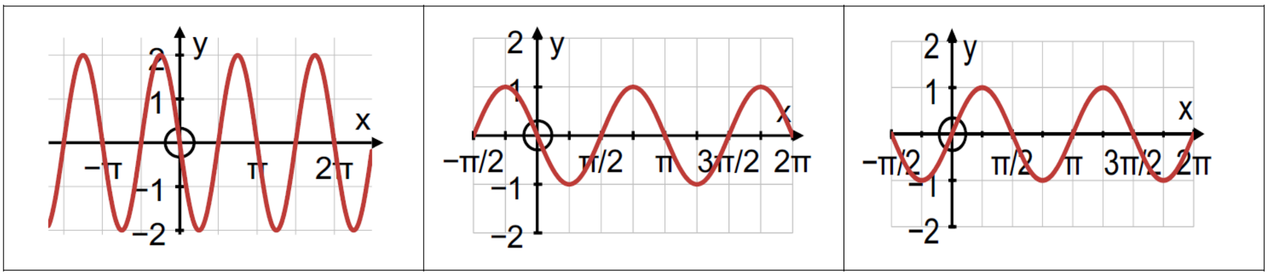
Gli studenti hanno incontrato molte difficoltà a elaborare un testo argomentativo. Ecco due esempi.

*“Il punto di massimo di f è crescente a destra. Se deve essere massimo, il punto deve crescere a sinistra.”*

*“x=1 non può essere un punto di massimo di f, poiché il dominio comprende dei valori sempre positivi che vanno da 0 a +∞.”*

Problema 5

Considera la funzione *f* di equazione $f(x)= \sin(2x+\pi)$. Fra i tre grafici rappresentati sotto individuane due che sicuramente non corrispondono a *f*. Spiega.




Ed ecco un paio di esempi di risposte tipiche.

*“Non può essere il primo grafico perché il seno esiste solamente tra −1 e 1”*
*“Il dominio del seno è [−1, 1], quindi escludiamo il primo grafico”*

Gli esempi di risposte ai problemi 4 e 5 sono particolari. Anche se non tutti gli studenti si esprimono in quel modo, è comunque comune trovare descrizioni imprecise, vaghe o comunque poco utili per ragionare sui problemi.

**2. Un primo bilancio**

Da tutti gli esempi visti finora possiamo trarre qualche conclusione. Va detto che le percentuali di successo o i punteggi medi dati per i problemi 1-3 (e varianti) sono puramente indicativi, in quanto non avevamo nessuna forma di controllo statistico sui campioni coinvolti, che avrebbero potuto anche non essere omogenei.

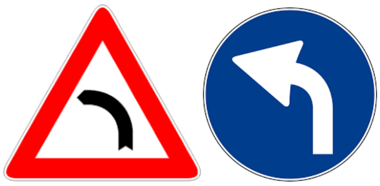
Dalle difficoltà relative ai problemi 1, 2 e 3 emergono, in misure diverse, difficoltà nella comprensione dei significati delle rappresentazioni. Gli errori sui problemi come il n. 1 (associazione di un’equazione al grafico di una retta) potrebbero essere evitati conoscendo i metodi appropriati, ma anche attraverso qualche sostituzione. Quest’ultima operazione richiede aver compreso il significato di un grafico, o se si preferisce la relazione tra l’equazione, il grafico e le coordinate dei punti che lo compongono. Lo stesso vale per i problemi 2.1 - 2.3. A questo proposito va detto che la variante 2.1 ha sistematicamente avuto risultati migliori delle altre. Questo potrebbe dipendere dal fatto che richiede soltanto un cambio di segno, mentre le altre richiedono altre trasformazioni, per quanto semplici. In gran parte delle risposte sbagliate sembra pesare la difficoltà di riconoscere come positivo un numero rappresentato da un’espressione che inizia con ‘−’ o, simmetricamente, come negativo un numero rappresentato da un’espressione che non inizia con ‘−’.
Questa difficoltà, che sposta sul piano sintattico una proprietà (il segno delle coordinate di un punto) che potrebbe essere ricavata semplicemente dall’osservazione del diagramma, sembra crescere insieme alla complessità delle espressioni coinvolte. Probabilmente il significato anche di una semplice moltiplicazione per 2 sul piano cartesiano non è del tutto padroneggiato da molte matricole. Anche i risultati dei problemi 3.1, 3.2 e varianti danno indicazioni simili. Qui è il significato

fondamentale di funzione che è incerto. Le difficoltà segnalate dagli esempi di risposte ai problemi 4 e 5 sono simmetriche rispetto a quelle discusse nei problemi 1-3. Se da quelli emerge la scarsa padronanza dei significati delle rappresentazioni, da questi emerge l'incapacità di rendere tali rappresentazioni oggetto di un discorso razionale e quindi di usarle come strumenti del pensiero.

**3. Due modi di usare le immagini**

Torniamo alla questione originaria, cioè alla contraddizione tra convinzioni diffuse sull'opportunità di usare molte immagini e l'esperienza di insegnamento che ammonisce sulle difficoltà collegate. La contraddizione potrebbe dipendere dal fatto che buona parte delle immagini da cui siamo circondati vengono usate in modi nettamente diversi rispetto agli usi matematici. La linguistica ci fornisce uno strumento efficace con l'idea di *inferenza*. In base a questa prospettiva, i testi vengono interpretati non solo analizzandoli in base alla grammatica e applicando le proprie conoscenze lessicali (il *dizionario*) ma anche sviluppando inferenze con cui l'ascoltatore o il lettore si sforza di esplicitare le informazioni implicite nel testo, utilizzando le sue conoscenze (l'*enciclopedia*)[3] e le sue convinzioni su chi produce il testo, sul tema, sul contesto in cui è stato prodotto e facendosi influenzare dalle emozioni che il testo può suscitare. Un testo può essere più o meno cooperativo, in quanto può richiedere una quantità minore o maggiore di inferenze o può guidare più o meno esplicitamente il ricevente a svolgere le inferenze necessarie per comprenderlo. Tutto questo vale anche per le immagini. Quindi, come per le altre rappresentazioni, l'interpretazione di immagini può richiedere inferenze, che a loro volta si basano sull'enciclopedia di chi le deve sviluppare. Molte delle immagini che vengono usate nella comunicazione quotidiana sono caratterizzate dal fatto di richiedere poche inferenze, mentre le immagini usate in matematica (ma anche nella comunicazione scientifica in genere) ne richiedono di solito molte di più.

I segnali stradali, ad esempio, sono progettati in modo da rendere minima la quantità di inferenze richieste (e quindi anche l'enciclopedia). Nel caso dei segnali sotto, il fatto che si tratta di curva, o svolta, a sinistra è comunicato iconicamente, mentre la differenza tra i due segnali (di pericolo il primo, di obbligo il secondo) è comunicata in modo convenzionale, attraverso la forma e il colore del cartello, in modo comunque ben marcato percettivamente.



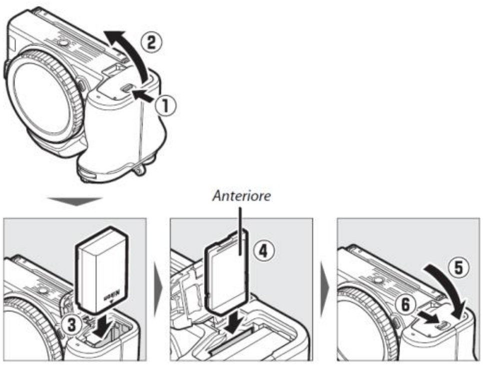
Nei simboli riportati sotto, che significano 'ospedale' il legame con il messaggio che vogliono trasmettere è diverso. Nel caso del simbolo a sinistra ('H') il legame col significato è puramente mnemonico (almeno nei paesi in cui la parola che designa un ospedale non comincia per 'H').


Nel caso del simbolo a destra il legame è più analogico, in quanto il letto può richiamare l'ospedale (ma anche l'albergo o altro). La croce rossa, che disambigua la rappresentazione, è convenzionalmente associata a questioni legate alla sanità. Quest'ultimo aspetto, che dovrebbe far parte dell'enciclopedia di quasi tutti gli individui adulti, può essere comunque facilmente memorizzato.

Simboli di questo tipo devono poter essere interpretati velocemente da persone di diversa lingua, cultura, competenza e stato di salute e devono richiedere pochissimo dal punto di vista di inferenze ed enciclopedia.

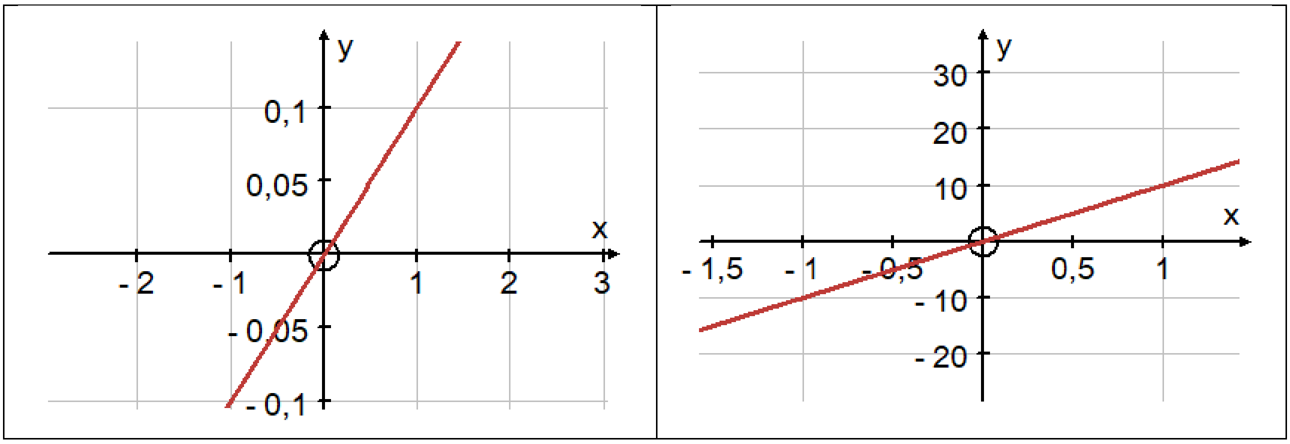
Per la maggior parte delle immagini di questo tipo e per la maggior parte degli individui che abbiano un minimo di esperienza, la prima interpretazione che viene in mente è quella appropriata. Sequenze di immagini sono anche utilizzate per rappresentare processi, ad esempio nei libretti di istruzioni.

Le immagini in basso illustrano il processo di inserimento di batteria e scheda di memoria in una fotocamera. La sequenza delle immagini è rigorosamente congruente a quella delle azioni da intraprendere, con il rinforzo dei numeri da 1 a 6. Con la fotocamera a disposizione è possibile ricostruire il processo usando pochissime conoscenze e svolgendo inferenze estremamente semplici.



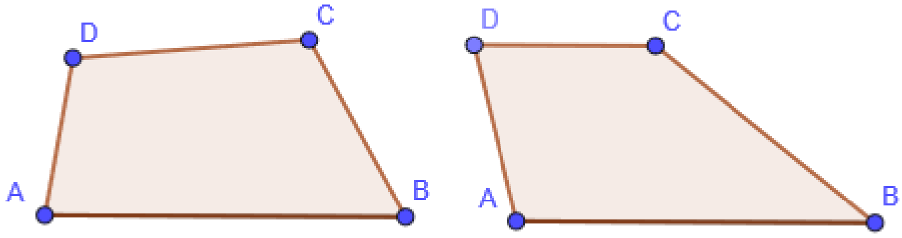

Questa è una situazione in cui le immagini sono probabilmente più efficaci delle parole. Descrivere a parole le posizioni di batteria e scheda sarebbe molto più faticoso.

L’efficacia di un’illustrazione come questa dipende comunque dalla ridotta necessità di svolgere inferenze. In queste situazioni, per un lettore con un po’ di esperienza, la prima interpretazione che viene in mente è quella appropriata, visto che rappresentazioni come questa sono di solito molto cooperative e spesso realizzate da professionisti della comunicazione. Chi le utilizza è in qualche modo consapevole di questo e viene così incoraggiato a fermarsi alla prima interpretazione. L’interpretazione delle rappresentazioni visuali della matematica spesso richiede molto di più. In matematica la prima interpretazione che viene in mente non è sempre quella corretta. In altre parole, le immagini della matematica possono non essere cooperative come un segnale stradale o un libretto di istruzioni. Ad esempio, stabilire quale delle due rette riportate sotto ha la pendenza maggiore richiede un qualche ragionamento che vada oltre la prima impressione.

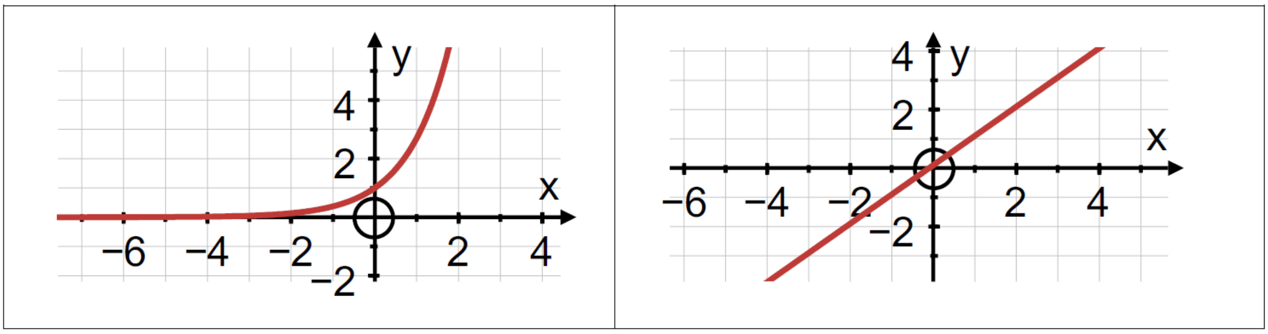


Questa non può essere considerata una pura e semplice domanda-trabocchetto da evitare nella pratica didattica. La capacità di valutare criticamente i dati e le loro rappresentazioni sta diventando sempre più importante, ed è fra gli obiettivi delle Indicazioni Nazionali per il secondo ciclo.

Questi fenomeni sono stati studiati sulla base di costrutti teorici diversi ma compatibili. Da un punto di vista semiotico possiamo mettere in luce le inferenze necessarie per interpretare un testo o un'immagine. Questo è utile per capire le caratteristiche dei segnali stradali e di altre immagini o pittogrammi comuni nella vita quotidiana e la differenza rispetto agli usi scientifici. Nella psicologia dell'educazione matematica è stata spesso utilizzata la teoria dei concetti figurali di Fischbein (citata in precedenza), in cui si sottolinea l'esigenza del controllo concettuale sulle immagini. Un'immagine la cui interpretazione richiede poche inferenze necessita anche di poco controllo concettuale, nel senso che l'informazione rilevante (ad esempio, il riconoscimento di un segnale stradale) è ricavabile prevalentemente sul piano percettivo o mnemonico. La differenza tra due segnali stradali, o tra un segnale stradale e un'altra indicazione, è ben marcata sul piano percettivo, mentre ad esempio, il fatto che la figura sotto a destra sia un trapezio, al contrario dell'altra, richiede una certa dose di controllo concettuale.




Allo stesso modo, un forte controllo concettuale è richiesto per comprendere che il grafico sotto a sinistra (della curva di equazione $y = e^x$) non si annulla per $x \leq -4$ e non ha un asintoto verticale in corrispondenza di una qualche valore positivo delle ascisse, e che il grafico sotto a destra (della retta di equazione $y=x+0,1$) non passa per l'origine.




Una caratteristica delle immagini, rispetto a testi o espressioni simboliche, è che lasciano al lettore una maggiore libertà di interpretazione. Sono ben noti esempi in cui questa libertà può portare a interpretazioni nettamente diverse. Al di là di queste considerazioni, restano comunque per tutte le immagini ampie possibilità di selezionarne alcune parti o aspetti e concentrarsi su quelle trascurando il resto. In moltissimi casi questo processo di selezione è inevitabile. Problemi come il 4 e il 5 non possono essere risolti con l'applicazione meccanica di un metodo ma richiedono comunque di selezionare alcuni aspetti dei grafici che sono rilevanti per la risposta. Questo mette in crisi quegli studenti addestrati ad applicare metodi in modo meccanico, o che hanno scelto autonomamente di farlo per ragioni di economia cognitiva. Le competenze richieste in questi casi sono piuttosto quelle legate all'euristica e alla modellizzazione.

In conclusione, quando si usano immagini bisogna essere consapevoli di questi due diversi modi di usarle. Le immagini della vita quotidiana ci abituano all'idea che la prima interpretazione che viene in mente sia quella buona. Quelle della matematica e della scienza in generale sono meno cooperative, spesso richiedono un processo di interpretazione più lungo e, soprattutto, più critico. Ci costringono insomma a non accettare la prima idea che ci viene in mente ma a cercare verifiche, magari confrontandole con altre rappresentazioni. Tutto questo è più faticoso ma è un passaggio obbligato per raggiungere la padronanza delle rappresentazioni di ogni genere con le quali veniamo a contatto.

**Bibliografia**

Eco, U. (1979). *Lector in fabula*, Milano: Bompiani.

Eco, U. (1984). *Semiotica e filosofia del linguaggio*. Torino: Einaudi.

Ferrari, P. L. (2021). *Educazione matematica, lingua, linguaggi. Costruire, condividere e comunicare matematica in classe*, Torino: Utet.

Fischbein E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, 24, 139-162.

Mariotti, M.A. (2015). Saper vedere in matematica alla luce della ricerca in didattica. Visualizzare in geometria come problema didattico. *La Matematica nella Società e nella Cultura*, Serie 1, Vol. 8, n.3, p. 109–142.